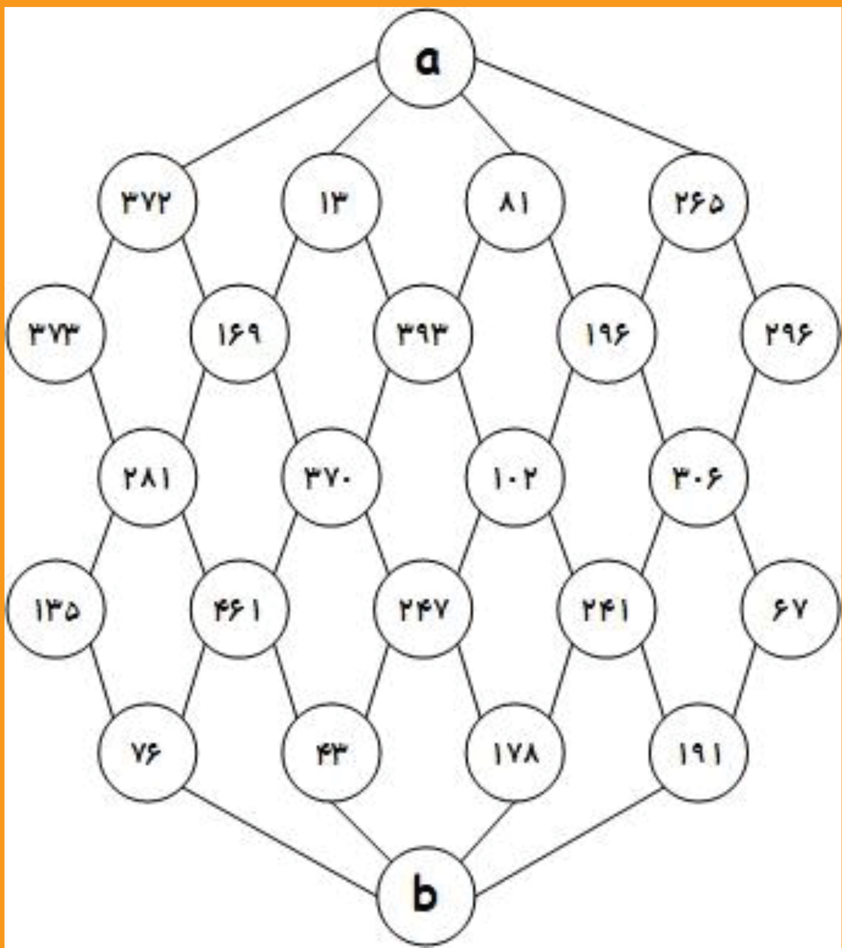
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد اول

(سال اول دبیرستان - نیمسال اول)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛
۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛
۳. همه داوطلبان کنکورها و المپیادها.

پرویز شهریاری

ریاضیات محاسبه ای

(برای استفاده در نیم سال اول دبیرستان)

نظام جدید

منتشر شده است:

خیابان دانشگاه ـ کوچهٔ میترا ـ شمارهٔ ۷ تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ ـ ۶۴۶۹۹۶۵

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول)

پرویز شهریاری

چاپ چهارم: تهران ۱۳۷۷

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانه رامین

شابک ۳ ـ ۸۲ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴ ISBN 964 - 5509 - 82 - 3

شابک دورهٔ ۴ جلدی ۳ ـ ۹۶ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴

ISBN 964 - 5509 - 96 - 3 (4 Vol. Set)

۱۲۰۰ تومان

پیش‌گفتار

این کتاب‌ها که بر پایهٔ تازه‌ترین برنامهٔ ریاضی دبیرستان‌ها تنظیم شده‌اند و، کتاب حاضر، جلد اول از این رشته کتاب‌هاست، چند ویژگی دارند:

۱. تلاش شده است تا ردیف برنامه، در کتاب‌های درسی، رعایت شود تا دانش‌آموزان، ضمن استفادهٔ از آن، دچار سرگردانی نشوند.

۲. کتاب به‌صورت خودآموز تهیه شده است تا بتواند مورد استفادهٔ همهٔ کسانی قرار گیرد که می‌خواهند مفهوم‌های ریاضی را با دقت فرا گیرند. به‌همین دلیل، از هیچ مطلبی، بدون دلیل یا شرح کافی رد نشده است.

۳. نویسندهٔ کتاب اعتقاد دارد که «تاریخ ریاضیات»، «فلسفهٔ ریاضیات» و «کاربردهای ریاضیات»، از خود ریاضیات جدا نیستند و هرجا لازم دیده است، گریزی به این بحث‌ها زده است.

۴. کتاب در سطحی بالاتر تنظیم شده است تا کسانی را هم که می‌خواهند، از همان آغاز، خود را برای مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادها آماده کنند، به‌کار آید. ولی بحث‌ها و مساله‌های دشوارتر، با نشانهٔ * مشخص شده‌اند، تا کسانی که تنها به برنامهٔ دبیرستانی و در سطح دبیرستانی علاقه‌مندند، بتوانند از پرداختن به آن‌ها صرف‌نظر کنند.

۵. بسیاری از روش‌ها و یا قانون‌ها، ضمن حل مساله‌ها شرح داده شده است و، بنابراین، اگر موفق به حل مساله‌ای شده‌اید، از مراجعه به راه‌حل کتاب خودداری نکنید تا هم راه‌حل خود را کنترل کنید و هم با روش‌های تازه آشنا شوید.

۶. کوشش شده است، مساله‌ها تازگی داشته باشد؛ در این کتاب، مساله‌های کتاب درسی (که بسیار ساده و در برخی موردها سطحی‌اند) و هم، مساله‌های کتاب‌های دیگر (ولو این‌که متعلق به نویسندهٔ این کتاب باشد)، تا حد امکان نیامده است؛ باوجود این، تلاش شده است، خواننده با گونه‌های مختلف مساله‌ها و روش‌های مختلف حل مساله‌ها، آشنا شود.

۷. چه در مورد موضوع‌ها و مفهوم‌ها و چه در مورد حل مساله‌ها، چه‌بسا روش‌های ساده‌تری وجود داشته باشد و، به‌همین دلیل، از همهٔ خوانندگان کتاب، برای رفع کمبودهای احتمالی آن، یاری می‌طلبم.

۸. جلد اول (کتاب حاضر)، برنامهٔ نیم سال اول دبیرستان را دنبال کرده‌است و آرزوی من این است که بتوانم جلدهای بعدی کتاب را، تهیه و منتشر کنم.

بیست‌وپنجم فروردین یکهزاروسیصدوهفتادوچهار

پرویز شهریاری

در این کتاب

پیش‌از آغاز

برای یادگیری زیست‌شناسی یا زبان، بیش از هرچیز به «حافظه» نیاز دارید، برای‌این‌که طرح یک ساختمان را روی صفحهٔ کاغذ بیاورید، باید «دقت» و تصور فضایی خوبی داشته‌باشید، برای این‌که در مسابقهٔ علمی رادیوئی یا تلویزیونی موفق شوید، علاوه برآگاهی، «سرعت عمل» و «سرعت تصمیم‌گیری» به شما یاری می‌رساند ...، ولی در ریاضیات به همهٔ این‌ها نیازمندید، به‌جز این‌ها، باید بتوانید بین آن‌چه در اختیار دارید (فرض) و آن‌چه لازم دارید (حکم) یک حلقهٔ ارتباطی محکم برقرار کنید. درواقع، باید بتوانید بین آن‌چه به شما داده‌اند، و آن‌چه از شما خواسته‌اند، رابطه‌ای منطقی پیدا کنید.

چند مساله‌ای که در این‌جا داده شده‌است، همین هدف را دنبال می‌کند. هیچ‌کدام از این مساله‌ها، به ریاضیاتی بیشتر از آن‌چه می‌دانید، نیاز ندارد. حتی دانش‌آموزی هم که تازه دورهٔ دبستان را تمام کرده‌است، می‌تواند آن‌ها را حل کند. برای پیدا کردن راه‌حل، باید بادقت و باحوصله، صورت مساله را بخوانید؛ اگر درصورت مساله دقت کنید، راه‌حل را هم پیدا خواهید کرد. بعداز آن‌که راه‌حلی برای مساله پیدا کردید، درپایان کتاب، راه‌حل ما را هم ببینید تا هم کار ما و هم کار شما مورد بازبینی قرار گیرد.

به‌طورکلی، به دانش‌آموزانی که به بالا بردن درک ریاضی خود علاقه‌مندند، توصیه می‌کنیم از مطالعهٔ کتاب‌های مربوط به سرگرمی‌های ریاضی غفلت نکنند. وقت خود را با این کتاب‌ها بگذارنید، چراکه بهترین راه برای درک بهتر مفهوم‌های ریاضی است.

مساله‌ها

۱. در زیر، در هرسطر شش عدد نوشته شده‌است و جای سه عدد

بعد از آن خالی است. هرسطر، برای خودش، یک مسالهٔ مستقل است و به سطرهای دیگر بستگی ندارد، ولی عددهای هرسطر، از چپ به راست، طبق قانونی به دنبال هم آمده‌اند. برای هرسطر، این قانون را پیدا کنید و سه عدد بعدی را بنویسید:

۱)	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...،
۲)	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	...،
۳)	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	...،
۴)	۹	۱	۷	۱	۵	۱	...،
۵)	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	...،
۶)	۲۱	۱۸	۱۶	۱۳	۱۱	۸	...،
۷)	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱	...،
۸)	۳	۴	۶	۹	۱۳	۱۸	...،
۹)	۱۵	۱۶	۱۴	۱۷	۱۳	۱۸	...،
۱۰)	۳	۶	۸	۱۶	۱۸	۳۶	...،
۱۱)	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	...،
۱۲)	۳	۵	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	...،

۲. (سرعت و دقت خود را آزمایش کنید). دراین‌جا، چند جمع یا تفریق نوشته شده‌است که برخی درست و برخی نادرست‌اند. آیا می‌توانید، حداکثر در ۲ دقیقه، جمع‌ها و تفریق‌های اشتباه را پیدا کنید و نشانه بگذارید؟ اگر به بیش‌از ۲ دقیقه نیاز دارید، باید با تمرین، سرعت کار خود را بیفزایید.

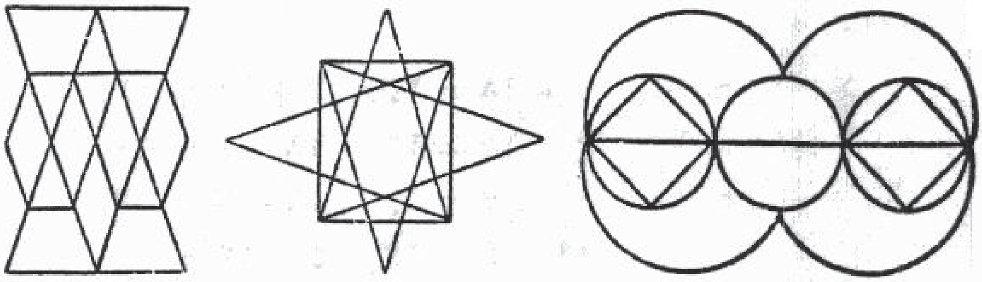
۳ + ۱۲ = ۱۵،   ۱۶ + ۴ = ۲۲،   ۱۵ − ۸ = ۷،
۱۳ + ۳ = ۱۰،   ۱۶ + ۸ = ۲۳،   ۱۳ − ۴ = ۹،
۱۶ − ۹ = ۷،   ۱۶ + ۹ = ۲۸،   ۱۳ − ۲ = ۱۱،
۱۲ − ۶ = ۶،   ۱۵ + ۹ = ۲۵،   ۱۵ − ۴ = ۱۱،
۱۵ − ۲ = ۱۳،   ۱۹ + ۵ = ۲۴،   ۱۲ − ۴ = ۱۶
۱۵ + ۵ = ۱۰،   ۱۴ − ۹ = ۵،   ۱۲ − ۹ = ۳،

۵ + ۱۷ = ۲۲,   ۷ + ۱۸ = ۲۵,   ۲ + ۱۱ = ۱۳,
۴ + ۱۸ = ۲۲,   ۶ + ۱۵ = ۲۲,   ۱۸ − ۸ = ۱۰,
۱۶ − ۵ = ۱۱,   ۱۲ − ۷ = ۵,   ۱۸ − ۷ = ۱۳,
۷ + ۷ = ۲۳,   ۱۹ − ۶ = ۱۳,   ۵ + ۱۳ = ۷,
۱۱۴ − ۸ = ۶,   ۱۶ + ۶ = ۲۲,   ۱۳ − ۵ = ۸,
۱۸ − ۴ = ۱۲,   ۱۴ + ۹ = ۲۳,   ۱۶ − ۲ = ۱۳,
۱۴ + ۶ = ۲۰,   ۱۱ + ۴ = ۱۴,   ۱۲ + ۹ = ۲,

۳. (*بازهم آزمایش سرعت و دقت*). در این جدول، همهٔ عددهای از ۱ تا ۵۱ نوشته شده‌است (که البته، به‌ترتیب نیستند). آیا می‌توانید آن‌ها را در کمتر از یک‌دقیقه‌ونیم، به‌ترتیب پیدا کنید و بخوانید؟ اگر موفق شوید، سرعت کار شما فوق‌العاده است.

۳۰	۴	۴۴	۱۳، ۳۴ / ۲۵	۱۱ / ۳۶	۲۴	۸	۲۹
۴۱ / ۶، ۲۸	۱۲ / ۳۲	۴۷	۳۸	۵	۲	۱۵	۴۹
۲۱	۳۹	۲۷	۱۸	۵۰	۴۵	۲۳ / ۷	
۳۳	۱۰ / ۱۹	۴۶	۱۶	۳۷، ۲۰ / ۳، ۴۳	۴۸	۳۱	۴۲
۵۱ / ۲۲	۱	۱۴	۴۰	۲۶ / ۱۷	۳۵	۹	

۴. (جست‌وجو و دقت). این سه شکل را، بدون این‌که قلم را از کاغذ جدا کنید و بدون این‌که دوبار از روی یک خط بگذرید، رسم کنید.



شکل ۱ : با حرکت پیوسته رسم کنید

۵. این تقسیم را کامل کنید

```
* * * * * | * *
          |------
          | * ۷ *
  ۷ ۷
 -----
  * ۷ *
  * ۷ *
 -------
    * *
    * *
 -------
      ۰
```

دراین‌جا، هرستاره، به‌معنای یک رقم است.

۶. مجموع سه عدد درست و مثبت، برابر است با p^p (p، عددی اول است)؛ درضمن، مجموع دوتا از آن‌ها، چهاربرابر سومی می‌شود. این عدد سوم را پیدا کنید.

۷. (دقت و اندکی حوصله). با ده رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، دو عدد بسازید، به‌نحوی‌که از هررقم یک‌بار، وتنها یک‌بار استفاده شود؛ درضمن، این دو عدد، یکی مجذور (توان دوم) و دیگری مکعب (توان سوم) یک عدد باشد (یعنی جذر اولی و کعب دومی باهم برابر باشند).

۸. رقم‌های از ۱ تا ۹ را از چپ به‌راست، بدون تکرار بنویسید.

۱۲۳۴۵۶۷۸۹

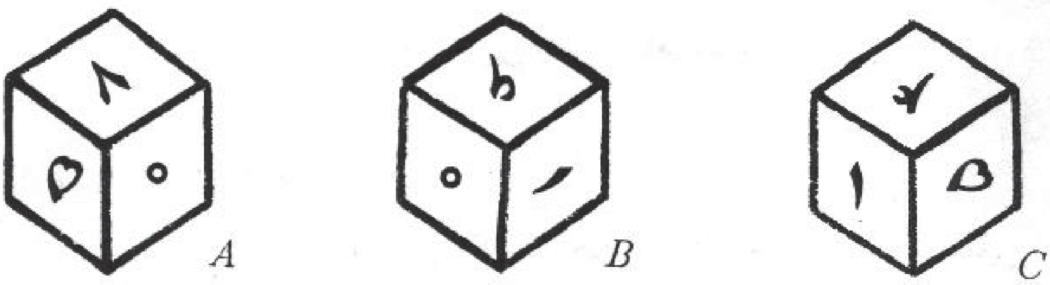
بین برخی از این رقم‌ها، درجاهایی، نمادهای + و − را قرار دهید، به‌نحوی که حاصل کل آن برابر ۱۰۰ شود.

اکنون رقم‌های از ۱ تا ۹ را، به‌ترتیب نزولی بنویسید.

۹۸۷۶۵۴۳۲۱

و مساله را حل کنید.

۹. روی وجه‌های یک مکعب، عددهای ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ و ۸ نوشته شده‌است (روی هروجه یک عدد). سه موقعیت مختلف این مکعب، در شکل ۲ داده شده‌است. در هر شکل، عددی را پیدا کنید که روی وجه زیرین نوشته شده‌است.

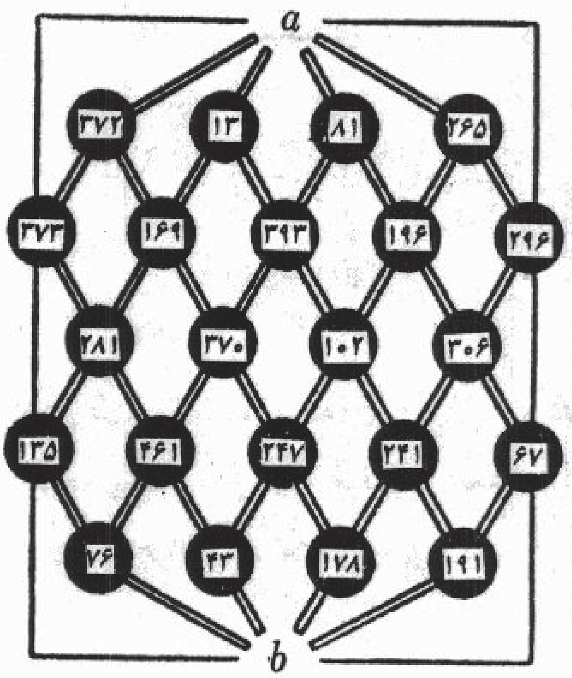


شکل ۲ : موقعیت‌های مختلف یک مکعب

۱۰. بین دو شهر A و B، مسیرهای مختلف زیادی وجود دارد، ولی یکی از این مسیرها، از بقیه کوتاه‌تر و به‌طول هزار کیلومتر است آن را پیدا کنید (شکل ۳).

۱۱. در یک کارخانه، سه دوست کار می‌کنند: چلنگر، تراش‌کار و جوش‌کار. نام کوچک آن‌ها، بهروز، مزدک و سروش است. چلنگر از همه کوچکتر است و خواهر یا برادری ندارد. سروش که از تراش‌کار بزرگتر است، با خواهر بهروز ازدواج کرده‌است. نام چلنگر، تراش‌کار و جوش‌کار چیست؟

۱۲. توکا، مژده، سهراب و رامین، جوانانی هنرمندند. یکی در گروه باله کار می‌کند، دیگری نقاش است، سومی آواز می‌خواند و چهارمی داستان



شکل ۳ : کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟

می‌نویسد. دربارهٔ آن‌ها، می‌دانیم:

۱) توکا و سهراب، در سالنی که آوازخوان، برای نخستین بار، هنرنمایی می‌کرد، حاضر شده‌بودند.

۲) مژده و داستان‌نویس، باهم، به دیدار نقاش رفته‌اند.

۳) نویسنده، زندگی‌نامهٔ رامین را به‌صورت یک رمان نوشته‌است و خیال دارد، دربارهٔ توکاهم بنویسد.

۴) توکا، هرگز چیزی دربارهٔ سهراب نشنیده است.

چه‌کسی به چه‌کاری مشغول است؟

۱. مجموعه‌ها

اندیشهٔ مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها و مفهوم آن، تا ژرفای همهٔ شاخه‌های ریاضیات امروزی نفوذ کرده و، به‌واقع، چهرهٔ آن را دگرگون کرده‌است، کسی نمی‌تواند تصور درستی دربارهٔ ریاضیات امروزی داشته‌باشد، مگر این‌که با مقدمه‌های نظریهٔ مجموعه‌ها، آشنا باشد.

پاول سرگه‌یه‌ویچ آلکساندروف

§۱. ورود به مطلب

هرگز اندیشیده‌اید که «جمع، یعنی‌چه؟» از همان زمانی که پشت نیمکت سال اول دبستان نشسته بودیم، تاامروز، کمتر پیش آمده‌است، روزی را بدون انجام «عمل جمع» بگذرانیم. «قاعدهٔ جمع کردن» را می‌دانیم و از کاربردهای آن آگاهیم؛ ولی خود «عمل جمع» را چگونه تعریف کنیم؟

اگر تلاش کنید تعریفی، برای عمل جمع، پیدا کنید، متوجه می‌شوید که ناچارید، به‌صورتی آشکار یا پنهان، از خود واژهٔ «جمع» یا واژه‌ای هم‌ارز آن استفاده کنید.

جمع، یعنی **افزودن** چند عدد به یکدیگر؛

روی **هم‌ریختن** عددها را، جمع گویند؛

عمل **اضافه کردن** واحدهای یک عدد، به واحدهای عدد دیگر را، جمع گویند. . . .

تنها با واژه‌ها بازی شده‌است؛ افزودن، روی هم ریختن، اضافه کردن، همهٔ این‌ها، به‌معنای «جمع کردن» هستند؛ مثل این است که بگوییم:

جمع کردن *عملی است که به آن عمل جمع گویند.*

البته، این جمله، درست است، ولی عیب آن دراین‌است که، هیچ حرف

تازه‌ای ندارد و چیزی به آگاهی ما نمی‌افزاید.

دشواری کار درکجا است؟

جمع، ساده‌ترین عمل ریاضی است. عملی ساده‌تر از آن وجود ندارد تا بتوان، باتکیه برآن، جمع را تعریف کرد، درضمن، هیچ تعریفی را از «هیچ» و بدون هیچ دستگیره‌ای، نمی‌توان آغاز کرد. آنچه جمع را به‌شما می‌شناساند، خود «عمل جمع» است، نه تعریف آن. زندگی، عمل و نیازهای روزانه است که درک معنای جمع را در ذهن ما به‌وجود می‌آورد . . .

§۲. مجموعه

برخلاف واژهٔ «جمع» که معرف ساده‌ترین عمل در ریاضیات است، واژهٔ «مجموعه»، مفهومی بسیار کلی است که نه‌تنها در ریاضیات و دانش‌های دیگر (مثل فیزیک، زیست‌شناسی، اخترشناسی و غیره)، که در زندگی روزانه هم، کاربرد فراوانی دارد. درعین‌حال که «مجموعه» یک مفهوم کلی است، مفهوم یا مفهوم‌هایی ساده‌تر از آن پیدا نمی‌شود که، با تکیه برآن‌ها، بتوان آن را تعریف کرد. از این‌بابت، می‌توان گفت که «مجموعه» هم، مثل «جمع»، یک مفهوم «مقدماتی» و غیرقابل تعریف است.

به‌جای «مجموعه»، می‌شد از واژه‌هایی مثل «تیم»، «کلکسیون»، «گروه»، «خانواده»، «دسته»، «طبقه»، «قشر» و غیر آن استفاده کرد:

- تیم والیبال مدرسهٔ ما؛
- کلکسیون تمبر خسرو؛
- گروه کوه‌نوردان؛
- خانوادهٔ خط‌های راست موازی باهم؛
- دستهٔ تظاهرکنندگان؛
- طبقهٔ کارگران؛
- قشر روشنفکران؛ . . .

به‌جای همهٔ این واژه‌ها، می‌توانستیم از واژهٔ «مجموعه» استفاده کنیم. ردیف کردن این واژه‌ها، مشکل ما را دربارهٔ تعریف مجموعه حل نمی‌کند. این واژه‌ها، از یک‌طرف غنی بودن زبان محاوره‌ای را نشان می‌دهد و، ازطرف‌دیگر، به‌خاطر کاربرد فراوانی که در گفت‌وشنودهای روزانه دارند، تصور مارا دربارهٔ «مجموعه» روشن‌تر می‌کنند.

ولی توجه کنیم: واژهٔ «مجموعه»، در زبان عادی، اندکی همراه با ابهام است و اغلب به‌معنای «خیلی» به‌کار می‌رود. وقتی می‌گوییم: «کاوه، مجموعه‌ای از بهترین تابلوهای نقاشی را دراختیار دارد»، نه تعداد تابلوهای او و نه نوع این تابلوها برای ما روشن نمی‌شود. یا اگر بشنویم: «مجموعه‌ای از هواداران تیم به ورزشگاه آمده بودند»، مثل این است که به ما گفته‌باشند: «خیلی از هواداران تیم در ورزشگاه جمع شده‌بودند».

ولی در ریاضیات، وقتی از واژهٔ «مجموعه» استفاده می‌کنیم که بدانیم، درآن:

۱) چه چیزهایی گردهم آمده‌اند؛

۲) چگونه می‌توان آن‌ها را تشخیص داد، یعنی چگونه می‌توان فهمید، فلان‌چیز، دراین «گردهم‌آیی» شرکت دارد یانه؛

۳) آیا تعداد این چیزها، شمردنی است یا بی‌شمار است، و اگر شمردنی است، چندتا هستند؟

مثلاً، وقتی می‌گوییم: «مجموعهٔ عددهای فرد بین ۴۰ و ۵۰» معلوم است که

۱) با عددهای فرد سروکار داریم؛

۲) این عددها باید از ۴۰ بزرگتر و از ۵۰ کوچکتر باشند؛

۳) آن‌ها را می‌توان شمرد، تعداد آن‌ها برابر است با ۵.

اگر نام این مجموعه را A بگذاریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$A = \{۴۱, ۴۳, ۴۵, ۴۷, ۴۹\}$$

همیشه برای نشان دادن یک مجموعه، از نشانهٔ $\{\}$ استفاده می‌کنند. دربارهٔ مجموعهٔ A می‌گویند:

۱) A، مجموعه‌ای با پایان (یا متناهی) است، یعنی از جایی آغاز شده و درجایی به پایان رسیده است؛

۲) هرکدام از عددهای ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷ یا ۴۹، یک عضو مجموعهٔ A است.

۳) عددی عضو مجموعهٔ A است که عددی درست و فرد باشد؛ درضمن از ۴۰ کوچکتر یا از ۵۰ بزرگتر نباشد.

§۳. نماد عضو بودن و نماد عضو نبودن

در مثال بالا، برای این‌که بنویسید: ۴۷ عضوی از مجموعهٔ A است، از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم:

$$۴۷ \in A \quad \text{یا} \quad ۴۷ \in \{۴۱, ۴۳, ۴۵, ۴۷, ۴۹\}$$

نماد $\notin$ راهم، برای عضو نبودن به‌کار می‌بریم: $۱۹ \notin A$.

درحالت اول، می‌خوانیم: «۴۷ عضو مجموعهٔ A است»، یا «۴۷ متعلق به مجموعهٔ A است».

درحالت دوم: «۱۹ عضو مجموعهٔ A نیست»، یا «۱۹، متعلق به مجموعهٔ A نیست».

[برخی از نویسندگان کتاب‌های ریاضی، برای «عدم عضویت»، از نماد $\overline{\in}$، استفاده کرده‌اند.]

به‌همین‌مناسبت، نماد $\in$ را، «نماد عضویت» یا «نماد تعلق»؛ و نماد $\notin$ [یا $\overline{\in}$] را «نماد عضو نبودن» یا «نماد عدم تعلق» نامیده‌اند.

مثال‌هایی از عضویت:

ـ تهران عضوی از مجموعهٔ شهرهای ایران است.

ـ «پ» عضوی از مجموعهٔ حرف‌های زبان فارسی است.

ـ زمین عضوی از مجموعهٔ سیاره‌های دستگاه خورشیدی است.

ـ مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به‌طول ۵ سانتی‌متر، عضوی از مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است.

ـ مربع، عضوی از مجموعهٔ چهارضلعی‌هاست.

ـ عدد ۱۸۹، عضوی از مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۹ است.

که در این نمونه‌ها، تنها سه مثال آخر، به مجموعه‌های ریاضی مربوط می‌شوند.

معمول شده‌است که، خود مجموعه را، با یکی از حرف‌های بزرگ لاتینی:

$$A, B, \ldots, M, N, \ldots, X, Y, Z$$

و عضو یک مجموعه را با حرف‌های کوچک لاتینی:

$$a, b, \ldots, m, n, \ldots, x, y, z$$

نشان می‌دهند.

§۴. مجموعهٔ معین

دیدیم، عضوهای یک مجموعه، به‌یاری رفتار آن‌ها ـ و یا دقیق‌تر: به‌یاری ویژگی‌های مشترک آن‌ها ـ مشخص می‌شوند. رفتار عضوهای یک مجموعه و یا ویژگی‌های مشترک آن‌ها، باید طوری معین شود که

۱) همهٔ عضوهای مجموعه را دربر گیرد؛

۲) معرف هیچ چیزی، غیر از عضوهای مجموعه نباشد؛

۳) دربارهٔ عضویت یا عدم عضویت یک‌چیز به مجموعهٔ موردنظر، تردید ایجاد نکند.

در چنین وضعی، مجموعه را معین می‌نامیم. در ریاضیات مقدماتی و درآغاز بررسی مجموعه‌ها، تنها با مجموعه‌های معین سروکار داریم.

مثال ۱. «مجموعهٔ عددهای کوچکتر از ۱۰۰ که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند»، یک مجموعهٔ معین است. اگر این مجموعه را A بنامیم، داریم:

$$A = \{۳۰, ۶۰, ۹۰\}$$

این مجموعه، سه عضو دارد و هیچ ابهامی در تعیین عضوهای آن پدید نمی‌آید.

مثال ۲. «مجموعهٔ مثلث‌هایی که عیلامی‌ها، در کتیبه‌های خود رسم کرده‌اند»، یک مجموعهٔ معین نیست، زیرا، ازیک‌طرف، به همهٔ کتیبه‌های باقی‌مانده از عیلامی‌ها دسترسی نداریم و، ازطرف‌دیگر، بسیاری از کتیبه‌های این قوم ازبین رفته است و هرگز دراختیار ما قرار نمی‌گیرد.

همچنین، «مجموعهٔ سیاره‌های کوچک و بزرگی که به‌دور خورشید می‌چرخند» یک مجموعهٔ نامعین است. درواقع، به‌جز سیاره‌های بزرگ (یعنی عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس، نپتون و پلوتون)، سیاره‌های کوچکی هم به‌دور خورشید می‌چرخند که نزدیک به ۱۶۰۰ عدد از آن‌ها، تاکنون شناخته شده‌اند و به «سیارک» یا «آستروئید» موسوم‌اند و، با مجهزتر شدن ابزارهای مشاهده، روزبه‌روز برتعداد آن‌ها افزوده می‌شود. برخی از این سیارک‌ها ـ مثل «سه‌رس»، «پالاس» و غیره تا صدها کیلومتر قطر دارند، درحالی‌که قطر برخی از یک کیلومتر تجاوز نمی‌کند. تاکجا باید، این سیارک‌ها را عضو مجموعه دانست؟ به‌جز این، معلوم نیست، سیاره‌های بزرگ دستگاه خورشیدی، به پلوتون ختم شده باشند. همین چندی‌پیش اطلاع دادند، نشانه‌هایی از یک سیارهٔ دستگاه خورشیدی، در فاصله‌ای بسیار دورتر از پلوتون، پیدا شده‌است.

این، مجموعه‌ای نامعین است و در «ریاضیات مقدماتی»، مورد بررسی

قرار نمی‌گیرد.

§۵. مجموعه‌های با پایان و مجموعه‌های بی‌پایان

این مجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم:

۱. مجموعهٔ عددهای یک‌رقمی را A می‌نامیم:

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

۲. مجموعهٔ B؛ عددهای اول بین ۳۰ و ۵۰:

$$B = \{۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷\}$$

۳. مجموعهٔ عددهای زوج، که آن را M می‌نامیم:

$$M = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \ldots\}$$

۴. مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۱۷ و مخالف صفر (مجموعهٔ N):

$$N = \{۱۷, ۳۴, ۵۱, ۶۸, ۸۵, \ldots\}$$

دو مجموعهٔ A و B، با دو مجموعهٔ M و N، تفاوتی اساسی باهم دارند. در مجموعه‌های A و B، تعداد عضوها محدود است؛ A دارای ۹ عضو و B دارای ۵ عضو است. این‌گونه مجموعه‌ها را، *مجموعه‌های باپایان* (یا مجموعه‌های محدود، یا مجموعه‌های متناهی) گویند.

در مجموعه‌های M و N (با این‌که می‌توانیم بفهمیم، کدام عدد، عضو مجموعه M یا N است و کدام عدد عضو این یا آن نیست)، نمی‌توانیم همهٔ عضوها را بنویسیم، زیرا تعدادآن‌ها «بی‌نهایت» است، یعنی پایان‌ناپذیرند و، به‌همین‌جهت، آن‌ها را *مجموعه‌های بی‌پایان* (یا مجموعه‌های نامحدود،

یا مجموعه‌های نامتناهی) گویند. سه نقطه‌ای را که بعد از جملهٔ ۱۰ در مجموعهٔ M و بعد از جملهٔ ۸۵ در مجموعهٔ N گذاشته‌ایم، به‌معنای این است که، دراین مجموعه‌ها، جملهٔ آخر وجود ندارد و تاهرجا پیش برویم، باز هم جمله‌های بعد از آن‌ها وجود دارد.

یادداشت. به این نکتهٔ مهم توجه کنید که، در یک مجموعه، عضو تکراری، عضو جدید به‌حساب نمی‌آید. هرعضو تنها یک‌بار نوشته می‌شود و اگر در مجموعه‌ای، یک یا چند عضو، دو یا چندبار تکرار شده‌باشند، می‌توان از عضوهای تکراری صرف‌نظر کرد. مثلاً مجموعهٔ

$$A = \{۳, ۵, ۷, ۹\}$$

با مجموعهٔ

$$B = \{۵, ۳, ۵, ۷, ۵, ۹\}$$

فرقی ندارد، اگرچه در مجموعهٔ B، عدد ۵ سه‌بار تکرار شده‌است. دو مجموعهٔ A و B باهم برابرند. درواقع دو مجموعه، *وقتی برابرند که، هرعضو مجموعهٔ اول، عضوی از مجموعهٔ دوم؛ هرعضوی از مجموعهٔ دوم، عضوی از مجموعهٔ اول باشد.*

دراین‌جا می‌توانیم بنویسیم:

$$A = B$$

درضمن، در بحث کلی از مجموعه‌های بی‌پایان (و در مجموعه‌های باپایان که مورد بررسی ما دراین کتاب است)، ردیف نوشتن عضوهای مجموعه، هیچ نقشی ندارد:

$$\{۳, ۵, ۷, ۹\} = \{۵, ۹, ۳, ۷\}$$

البته در مجموعه‌های بی‌پایان، منطقی‌تر این‌است که ردیف را رعایت کنیم، نه به‌این‌خاطر که اگر ردیف جمله‌ها را عوض کنیم، مجموعه تغییر می‌کند، بلکه به‌این دلیل که بتوانیم ازروی ردیف جمله‌ها، قانونی را که برآن‌ها حاکم است، بفهمیم و بتوانیم جمله‌های بعدی را (که نوشته نشده است) حدس بزنیم.

§۶. شکل دیگر نوشتن یک مجموعه

برای نوشتن یک مجموعه، می‌توانیم، به‌جای این‌که تک‌تک عضوهای آن را نام ببریم (کاری که تا این‌جا کردیم)، ویژگی مشترک عضوهای آن را ذکر کنیم. این مجموعه را درنظر بگیرید:

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$$

عضوهای این مجموعه، دو ویژگی مشترک دارند: ۱) همهٔ آن‌ها عددهایی فردند؛ ۲) همه آنها عددهایی یک‌رقمی‌اند. به‌این‌ترتیب، اگر بگوییم: عددهای فرد یک‌رقمی، عضوهای مجموعهٔ A را تشکیل داده‌اند، توانسته‌ایم مجموعهٔ A را به‌طور کامل معرفی کنیم.

چون عضوهای مجموعه را با حرف‌های کوچک الفبای لاتینی نشان می‌دهند، a را نامی عمومی برای هرعضو مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$A = \{a| \text{عدد فرد یک‌رقمی است ،} a\}$$

که البته، آن را به‌این‌صورت هم می‌توان نوشت:

$$A = \{a|a = ۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$$

اکنون، این مجموعه را درنظر بگیرید:

$$X = \{۳, -۳\}$$

این مجموعه دو عضو دارد: ۳ و ۳ـ، که قرینهٔ یکدیگرند. پس می‌توان نوشت:

$$X = \{x | x^{۲} = ۹\}$$

از این روش، برای نوشتن مجموعه‌های بی‌پایان هم می‌توان استفاده کرد. اگر مجموعه‌ای، شامل همهٔ عددهای زوج (مثبت) باشد و مجموعه را با Y نشان دهیم، می‌توان یکی از دوصورت زیر را برای معرفی آن انتخاب کرد:

$$Y = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \ldots\}$$

$$Y = \{y | y = ۲k, k \in \mathrm{N}\}$$

دراین‌جا منظور از N، مجموعهٔ عددهای طبیعی است؛ یعنی اگر k عددی طبیعی باشد، $y = ۲k$، عددی زوج (یعنی عضوی از مجموعهٔ Y) است.

§۷. مجموعهٔ یکانی و مجموعهٔ تهی

واژهٔ مجموعه، در زبان عادی، به‌معنای «خیلی» و «بسیار» است. وقتی می‌گوییم: *فرهاد، مجموعه‌ای از کتاب‌های ریاضی را جمع‌آوری کرده‌است*، به‌طور طبیعی، در ذهن ما، چند کتاب (و بی‌تردید، بیش از دو کتاب) مجسم می‌شود. ولی در ریاضیات، می‌توان با مجموعه‌هایی سروکار داشت که تنها یک عضو داشته‌باشند ویا، حتی، عضوی نداشته‌باشند.

مجموعه‌ای را که تنها یک عضو داشته‌باشد، *مجموعهٔ یکانی* و مجموعهٔ بدون عضو را، *مجموعهٔ تهی* می‌گویند.

برای مجموعهٔ تهی، نماد خاصی هم درنظر گرفته‌اند: ϕ.

چند مثال

۱) مجموعهٔ حرف‌های نقطه‌دار در واژهٔ «مژده». این، یک مجموعهٔ یکانی است، زیرا «مژده» تنها یک حرف نقطه‌دار دارد: «ژ».

۲) مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۲x = ۶$. این هم، یک مجموعهٔ یکانی است؛ معادلهٔ $۲x = ۶$ تنها یک جواب دارد: $x = ۳$.

۳) مجموعهٔ حرف‌های نقطه‌دار، در واژهٔ «ره‌آورد»، یک مجموعهٔ تهی است: در واژهٔ «ره‌آورد»، حرف نقطه‌دار وجود ندارد.

۴) مجموعهٔ عددهای اول بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، یک مجموعهٔ تهی است، زیرا بین این دوعدد، عدد اول پیدا نمی‌شود. درواقع، بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، شش عدد فرد وجود دارد (عددهای زوج اول نیستند، چون بر۲ بخش‌پذیرند):

$$۱۱۵, ۱۱۷, ۱۱۹, ۱۲۱, ۱۲۳, ۱۲۵$$

که هیچ‌کدام از آن‌ها، اول نیستند: ۱۱۵ و ۱۲۵، بر۵ بخش‌پذیرند، ۱۱۷ و ۱۲۳ بر ۳ بخش‌پذیرند؛ ۱۱۹ بر۷ و ۱۲۱ بر۱۱ بخش‌پذیر است. بنابراین، مجموعهٔ عددهای اول بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، یک مجموعهٔ تهی است.

*_یادداشت._ دو نکته را دربارهٔ مجموعهٔ تهی یادآور می‌شویم: اول این‌که، ممکن است، مجموعه نامعین باشد و نتوانیم حکم کنیم، آیا مجموعهٔ مفروض، تهی است یانه!

مثلاً فرضیه‌ای وجود دارد (فرضیه فویرباخ) که هرعدد زوج را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت. ولی این فرضیه ثابت نشده است. بنابراین نمی‌دانیم «مجموعهٔ عددهای زوجی که آن‌ها را به‌صورت مجموع دو عدد اول نمی‌توان نوشت»، یک مجموعهٔ تهی است یانه!

همچنین فرضیه‌ای وجود دارد (فرضیه کوچک‌پور) که بنابرآن، هرعدد طبیعی برابر است با نصف مجموع دو عدد اول که نسبت به آن عدد طبیعی، هم‌فاصله‌اند. مثلاً

$$۱۰ = \frac{۱}{۲}(۷ + ۱۳) = \frac{۱}{۲}(۳ + ۱۷)$$

درضمن، فاصله ۱۰ تا ۷، برابر است با فاصله ۱۰ تا ۱۳، یا فاصلهٔ ۳ تا ۱۰ برابر است با فاصلهٔ ۱۰ تا ۱۷. همچنین

$$۲۹ = \frac{۱}{۲}(۱۷ + ۴۱);\ ۱۰۰ = \frac{۱}{۲}(۹۷ + ۱۰۳)$$

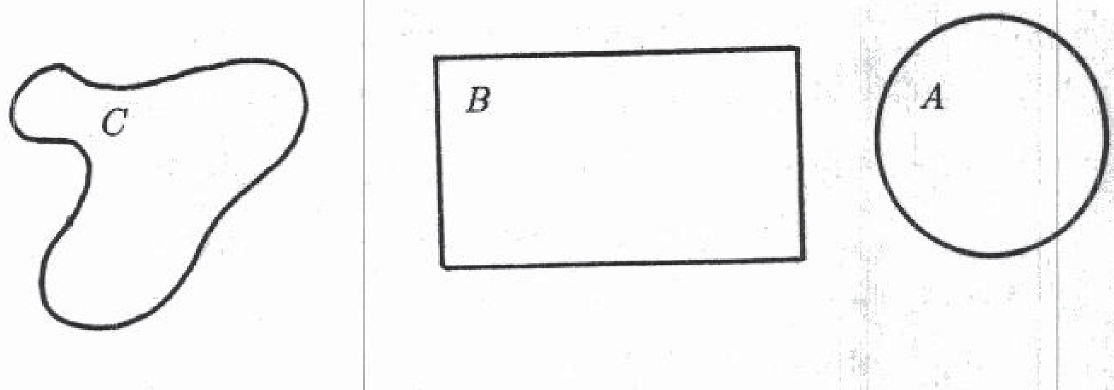
ولی چون این فرضیه ثابت نشده‌است، نمی‌دانیم، مجموعهٔ عددهایی که نتوان آن‌ها را به‌این‌صورت نوشت، تهی است یانه!

نکتهٔ دوم این‌که، *تنها یک مجموعهٔ تهی وجود دارد*؛ یعنی همهٔ مجموعه‌های تهی باهم برابرند.

مجموعهٔ دانش‌آموزان سه‌ساله سال اول دبیرستان، با مجموعهٔ عددهای کوچکتر از ۲۰ که بر۳۱ بخش‌پذیر باشند، دو مجموعهٔ متفاوت نیستند.

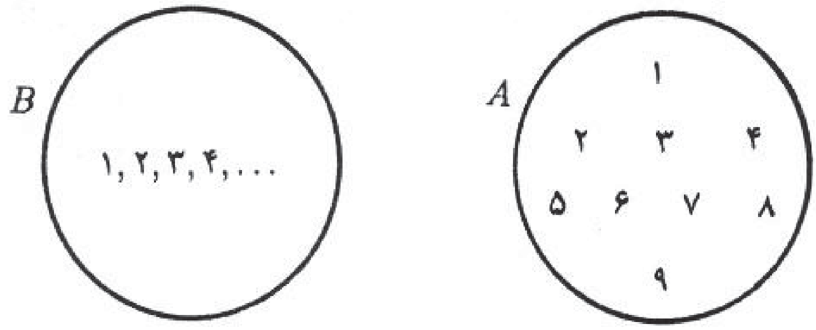
§۸. نمایش هندسی مجموعه‌ها

برای نشان دادن یک مجموعه می‌توان از یک شکل مستوی که دوره‌ای بسته داشته‌باشد، استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۴ می‌بینید، این شکل، می‌تواند هرشکل مستوی دلخواهی باشد، ولی معمول شده‌است، برای نمایش



شکل ۴ : شکل‌های هندسی، برای نمایش مجموعه‌های A، B و C

هندسی یک مجموعه ـ که به آن نمودار وِن آن مجموعه گویند ـ از دایره استفاده کنند.



شکل ۵ : A، مجموعهٔ عددهای یک‌رقمی B، مجموعهٔ عددهای طبیعی

اغلب ضرورتی پیدا نمی‌کند، عضوهای مجموعه را در درون دایره‌ای که برای نمایش هندسی آن رسم کرده‌ایم، بنویسیم یا نقاشی کنیم، زیرا نمودار وِن، بیشتر برای درک قانون‌هایی که بربستگی دویا چند مجموعه، نسبت به‌هم حاکم است، به‌کار می‌رود، نه نمایش یک مجموعه. باوجوداین، گاهی لازم می‌شود، عضوهای مجموعه را مشخص کنیم (شکل ۵) که، دراین‌صورت، باید آن‌ها را نام ببریم، یا ویژگی مشترک آن‌ها را بنویسیم. برای نخستین‌بار *لئونارد اولر* (۱۷۸۳_۱۷۰۳)، برای نمایش یک مجموعه، از شکل‌های هندسی استفاده کرد، ولی جون وِن (۱۹۲۳_۱۸۳۴) بود که با کاربرد فراوان نمایش هندسی مجموعه، در نوشته‌های خود، آن را عمومی کرد؛ به‌همین مناسبت است که به این نمایش هندسی، نمودار وِن می‌گویند.

§۹. زیرمجموعه یا مجموعک

به واژهٔ «بالین» توجه کنیم. این واژه، مجموعه‌ای از پنج حرف الفباست:

$$A = \{ \text{ب، ا، ل، ی، ن} \}$$

اکنون تلاش کنید واژه‌های دیگری، با چند حرف از این پنج حرف بسازید که در زبان فارسی معنی داشته‌باشند.

با یک حرف، نمی‌توان واژه‌ای ساخت. ولی واژه‌های (معنی‌دار) دوحرفی، سه‌حرفی، چهارحرفی و پنج‌حرفی را دراین‌جا آورده‌ایم:

دوحرفی: لب، آب، نی، یَل، بُن؛

سه‌حرفی: بال، نیل، بنا، بلا، نای، بیل، ناب؛

چهارحرفی: یلان، لبان؛

پنج‌حرفی: بیلان.

روشن است، اگر به‌معنای واژه‌ها، اهمیت ندهیم، فهرست واژه‌های ما، خیلی درازتر می‌شود.

مجموعهٔ A، شامل پنج حرف بود ب، ا، ل، ی و ن. در واژه‌هایی که درست کردیم، از هیچ حرف دیگری به‌جز همین پنج حرف استفاده نکردیم. در نظریهٔ مجموعه‌ها، هریک از واژه‌های جدید را، *زیرمجموعه‌ای* از واژهٔ «بالین» می‌گویند.

به این نکته‌های مهم توجه کنید:

۱) در ریاضیات، به‌معنای واژه‌ها توجه نمی‌کنیم، بنابراین باید همهٔ واژه‌هایی را که می‌توان با این پنج حرف ساخت، زیرمجموعه‌های A به‌حساب آوریم، حتی زیرمجموعه‌های «یک‌حرفی»

۲) واژهٔ «بیلان» شامل هرپنج حرف مجموعهٔ A است و درواقع، ازنظر ریاضی، با مجموعهٔ A برابر است، باوجوداین، می‌توان آن‌راهم زیرمجموعه‌ای از A دانست.

۳) دو واژهٔ «بال و بلا» و، همچنین، دو واژهٔ «ناب» و «بنا»، ازنظر ریاضی، دو مجموعهٔ مختلف نیستند، زیرا عضوهای یکی، با عضوهای دیگری، تفاوتی ندارد.

۴) در شناسایی زیرمجموعه، بهتر است بگوییم: باید شامل هیچ عضوی، جز عضوهای مجموعهٔ اصلی نباشد؛ دراین‌صورت، مجموعهٔ تهی

هم، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A است.

تعریف. *مجموعهٔ B را زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A گوییم، وقتی که هرعضو B، درضمن، عضوی از مجموعهٔ A باشد.*

بنابر این تعریف: هرمجموعه‌ای را می‌توان زیرمجموعه‌ای از خودش دانست؛ درضمن، مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هرمجموعهٔ دلخواه است.

به مثال‌هایی از ریاضیات بپردازیم. این مجموعه را درنظر می‌گیریم:

$$P = \{۱, ۳, ۵\}$$

ببینیم، مجموعهٔ P، چند زیرمجموعه دارد.

۱) مجموعهٔ بدون عضو، یعنی مجموعهٔ تهی: ϕ؛

۲) سه مجموعهٔ یک‌عضوی: $\{۱\}$، $\{۳\}$، $\{۵\}$؛

۳) سه مجموعهٔ دوعضوی: $\{۱, ۳\}$؛ $\{۱, ۵\}$، $\{۳, ۵\}$؛

۴) یک مجموعهٔ سه‌عضوی: $\{۱, ۳, ۵\}$.

روی‌هم ۸تا. مجموعهٔ P، دارای ۸ زیرمجموعه است.

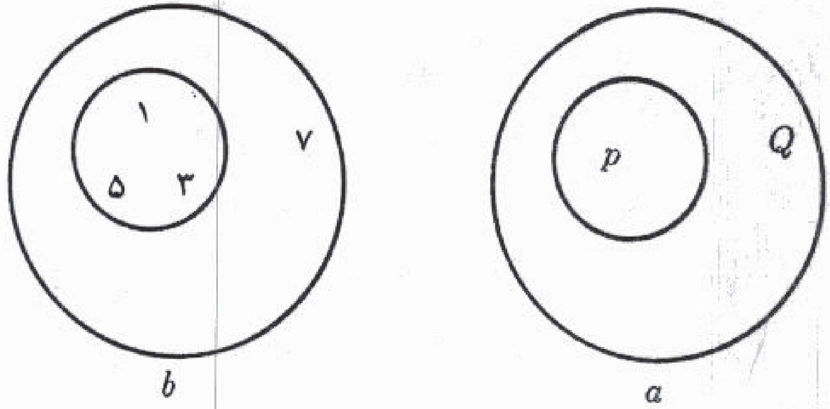
اکنون، ببینیم، مجموعهٔ زیر که دارای چهار عضو است، چند زیرمجموعه دارد:

$$Q = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$

همهٔ زیرمجموعه‌های P، زیرمجموعه‌های Q هم هستند، ولی اگر به‌هریک از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ P، عضو ۷ را اضافه کنیم، زیرمجموعه‌های جدیدی برای Q به‌دست می‌آید:

۱) اگر به‌عضوهای مجموعهٔ تهی، عضو ۷ را اضافه کنیم، مجموعهٔ یکانی $\{۷\}$ به‌دست می‌آید؛

۲) اگر به هریک از سه مجموعهٔ یک‌عضوی، عضو ۷ را اضافه کنیم، سه مجموعهٔ دوعضوی $\{۱, ۷\}$، $\{۳, ۷\}$ و $\{۵, ۷\}$ به‌دست می‌آید؛



شکل ۶

۳) با اضافه‌کردن عضو ۷ به هرکدام از مجموعه‌های دوعضوی، سه زیرمجموعهٔ تازه برای Q پیدا می‌شود که هرکدام سه عضو دارند:

$$\{۱,۳,۷\}, \quad \{۱,۵,۷\}, \quad \{۳,۵,۷\}$$

۴) با اضافه‌کردن عضو ۷ به مجموعهٔ سه‌عضوی $\{۱,۳,۵\}$، مجموعهٔ چهارعضوی $\{۱,۳,۵,۷\}$ نتیجه می‌شود.

به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ Q، به‌جز ۸ زیرمجموعهٔ P، ۸ زیرمجموعهٔ دیگر هم دارد، روی‌هم ۱۶ زیرمجموعه.

زیرمجموعه را با نماد $\subset$ نشان می‌دهند، مثلاً درمورد مجموعه‌های P و Q، می‌توان نوشت:

$$P \subset Q$$

در نمایش هندسی، وقتی‌که مجموعه‌ها را با نمودار ون نشان دهیم، دو مجموعهٔ P و Q، به‌صورت شکل ۶ (a یا b) نشان داده می‌شوند: در شکل ۶ـa، تنها نام دومجموعه آمده‌است، ولی در شکل ۶ـb، عضوهای دومجموعه مشخص شده‌اند.

همچنین می‌توان نوشت

$$\{۱,۳,۵\} \subset \{۱,۳,۵,۷\}$$

گاهی‌هم، بنابه‌ضرورت، می‌نویسند:

$$Q \supset P$$

چند نتیجهٔ ناشی از تعریف زیرمجموعه

۱. نماد زیرمجموعه، برگشت‌پذیر نیست، یعنی اگر A، زیرمجموعه‌ای از B باشد، ممکن است B زیرمجموعهٔ A نباشد.

درستی این حکم روشن است؛ اگر داشته‌باشیم:

$$A = \{a, c\} \text{ و } B = \{a, b, c\}$$

روشن است که $A \subset B$، زیرا هرعضو A (a یا c) درضمن عضوی از B است؛ ولی B زیرمجموعهٔ A نیست، زیرا حرف b (که عضوی از مجموعهٔ B است) دربین عضوهای مجموعهٔ A دیده نمی‌شود.

۲. اگر درمورد دو مجموعهٔ C و D، نماد $\subset$ برگشت‌پذیر باشد، یعنی اگر $D \subset C$ و $C \subset D$، آن‌وقت C و D، دو مجموعهٔ برابرند: $C = D$.

۳. نماد $\subset$ سرایت‌پذیر است، یعنی از $A \subset B$ و $B \subset C$، نتیجه می‌شود: $A \subset C$. مثلاً فرض کنیم:

A، مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۴؛

B، مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر۲؛

C، مجموعهٔ عددهای طبیعی.

روشن است که $A \subset B$ (هرعددی که بر ۴ بخش‌پذیر باشد، بر۲ هم بخش‌پذیر است) و $B \subset C$ (هرعدد بخش‌پذیر بر ۲، یکی از عددهای طبیعی است)؛ درضمن $A \subset C$ (هرعددی که بر۴ بخش‌پذیر باشد، عددی طبیعی است).

§۱۰. مجموعهٔ مادر و مجموعهٔ متمم

اگر مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی را C بنامیم

$$C = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰, ۱۱, ۱۲, \ldots\}$$

آن‌وقت مجموعهٔ B، که شامل همهٔ عددهای زوج (بخش‌پذیر بر ۲) است:

$$B = \{۲, ۴, ۶, \ldots, ۱۰, ۱۲, \ldots\}$$

زیرمجموعه‌ای از آن است: $B \subset C$؛ یعنی هرعضو B، درضمن عضوی از C است؛ به‌زبان‌دیگر، عضوهای مجموعهٔ B را ازبین عضوهای مجموعهٔ C انتخاب کرده‌ایم؛ به‌همین مناسبت می‌توان مجموعهٔ C را، **مجموعهٔ مادر** یا **مجموعهٔ مرجع** نامید.

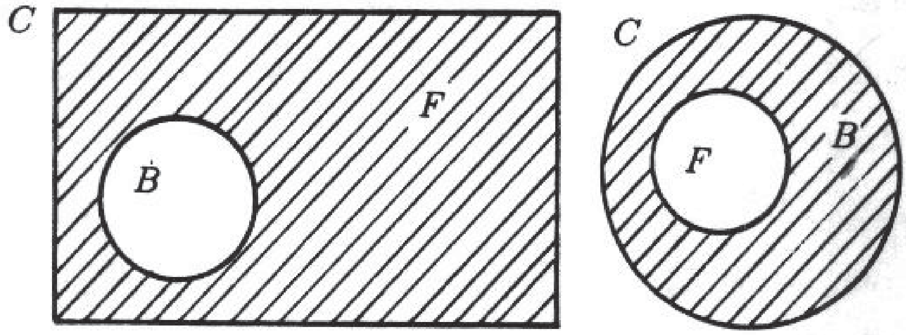
هرمجموعه‌ای را می‌توان مجموعهٔ مادر، برای هریک از زیرمجموعه‌های خود دانست.

وقتی عددهای زوج را از مجموعهٔ C برداریم (و مجموعهٔ B را تشکیل دهیم) آن‌چه باقی می‌ماند، خودش یک مجموعه است: مجموعهٔ عددهایی که بر۲ بخش‌پذیر نیستند، یعنی مجموعهٔ عددهای فرد. اگر مجموعهٔ عددهای فرد را F بنامیم، آن‌وقت F را متمم مجموعهٔ B، نسبت به مجموعهٔ مرجع C گویند. البته، نسبت به مجموعه مرجع C، مجموعهٔ B هم، متمم مجموعهٔ F است.

به‌جای واژهٔ متمم، می‌توان از واژهٔ تفاضل استفاده کرد و نوشت:

$$C - B = F \text{ یا } C - F = B$$

درشکل ۷، بخش سایه‌خورده، نمایندهٔ مجموعهٔ متمم یا تفاضل دو مجموعه است. گاهی برخی از نویسندگان توصیه می‌کنند که، مجموعهٔ مادر با مستطیل نشان داده شود، ولی همان‌طور که پیش‌ازاین گفتیم، برای نمودار



شکل ۷:

وِن، هیچ قیدی وجود ندارد و برای نمایش هندسی یک مجموعه (مرجع یا غیرمرجع) از هرشکلی می‌توان استفاده کرد.

*§۱۱. اندکی بیشتر دربارهٔ مجموعه‌ها

به‌ویژه، از زمانی که زنون، برای به‌کرسی نشاندن فلسفهٔ استاد خود، *پارمنیدس* (که معتقد بود، در جهان، حرکتی وجود ندارد و، آن‌چه به‌نام حرکت شناخته‌شده‌است، تنها تصوری ذهنی است)، چهار استدلال شبه‌ریاضی، برای اثبات «بی‌حرکتی» آورد، همهٔ ریاضی‌دانان (وهم فیلسوفان) از طرح مفهوم «بی‌نهایت» یا «نامتناهی» فرار می‌کردند. ارسطو هم معتقد بود که خود واژهٔ بی‌نهایت، همراه با تناقض است و نزدیک به دوهزارسال بعد، هِگل فیلسوف آلمانی هم، بی‌نهایت را مفهومی می‌دانست که باخودش درتضاد است.

درواقع، زنون، استدلال‌های خود را، با استفاده از مفهوم بی‌نهایت (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) گذاشته بود. یکی از استدلال‌های او را می‌آوریم.

اگر قهرمان دو، از لاک‌پشت عقب باشد، هرگز نمی‌تواند به لاک‌پشت برسد.

زنون استدلال می‌کرد، درمدتی‌که قهرمان، فاصلهٔ اولیهٔ بین خود و لاک‌پشت را می‌پیماید، لاک‌پشت اندکی جلو رفته‌است و بنابراین، قهرمان ما باید این فاصلهٔ جدید را هم بپیماید. ولی با پیمودن آن، باز هم لاک‌پشت فاصلهٔ دیگری را (هرقدر کوچک) جلو رفته‌است، بنابراین، باز هم فاصله‌ای برای قهرمان می‌ماند که باید طی کند. این استدلال را می‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد، برای این‌که قهرمان به لاک‌پشت برسد، به بی‌نهایت زمان نیاز دارد، یعنی هرگز به او نمی‌رسد.

البته، استدلال‌های زنون، بعدها (والبته خیلی بعد)، چه ازنظر ریاضی و چه ازنظر فلسفی رد شد، ولی تامدت‌ها، ریاضی‌دانان و فیلسوفان را ازنزدیک شدن به مفهوم بی‌نهایت، ترسانده بود.

باوجود این، کارهای ریاضی *نیوتون* و *لایب نیتس* و دیگران تاحد زیادی این ترس را کنار زده بود، ولی یک بررسی جدی ریاضی لازم بود تا عمل کردن با نامتناهی را در قلمرو ریاضیات قرار دهد

و این، کانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸ میلادی) بود که، با وارد کردن مفهوم مجموعه و به‌ویژه کشف قانون‌مندی‌های حاکم برمجموعه‌های نامتناهی، بحث مربوط به «بی‌نهایت» را به حیطهٔ ریاضیات درآورد و بخش عمده‌ای از گیرهای ذهنی فیلسوفان و ریاضی‌دانان را، به‌یاری استدلال‌های منطقی و ریاضی، برطرف کرد.

بحث مربوط به مجموعه‌ها و قانون‌های حاکم برآن، به‌تدریج برتمامی ریاضیات سایه افکند و ازطریق آن، سایر دانش‌ها را زیرنفوذ خود گرفت و به ابزاری تبدیل شد که، بدون آن، پیشرفت ریاضیات ناممکن به‌نظر می‌رسید.

ولی باید به یاد داشت که، برای استفاده از مفهوم مجموعه، باید برقانون‌های حاکم برآن و برروش «حساب مجموعه‌ها» (ویا به زبانی دیگر «جبر مجموعه‌ها») تسلط داشت. تنها با به‌کار بردن واژهٔ مجموعه، مشکل حل نمی‌شود. بودند و هستند مؤلفانی که مثلاً به‌جای واژهٔ «خط» از واژهٔ

ترکیبی «مجموعهٔ نقطه‌ها» استفاده می‌کنند و یا به‌جای «دنبالهٔ عددهای طبیعی»، اصطلاح «مجموعهٔ عددهای طبیعی» را به‌کار می‌برند و یا به‌جای این‌که بگویند «مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که . . .» می‌نویسند «مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که . . .». ولی این، هیچ دشواری جدی ریاضیات را حل نمی‌کند وتنها می‌تواند موجب شگفتی خواننده شود که: *مگر واژه‌ها و اصطلاح‌های قبلی چه عیبی داشت که باید آن‌ها را کنار بگذاریم و به‌زور واژهٔ «مجموعه» را در جمع‌بندی‌های خود وارد کنیم؟*

و.و.سایز (W.W.Sawyes)، ریاضی‌دان و مربی پراعتبار انگلیسی، در پیش‌گفتار کتاب «مسیر ریاضیات جدید» (که در حدود سال ۱۹۷۰ میلادی چاپ شد)، با اندوه دربارهٔ این ساده‌اندیشی صحبت می‌کند. او می‌نویسد:

«درمیان مسئولان بانفوذ آموزش دبیرستانی، به عدهٔ کمی می‌توان برخورد که دیدی واقع‌بینانه داشته‌باشند. برای پر کردن شکاف‌هایی که در آموزش ریاضی وجود دارد، تلاش جدی انجام نمی‌گیرد، بلکه به‌طور ساده، این شکاف‌ها را می‌پوشانند و پنهان می‌کنند، درست همان‌طور که ترک‌های دیوار، با کاغذ دیواری تازه‌ای پوشانده می‌شود. نوسازی برنامه‌ها، به‌جای این‌که اندیشه‌های تازه‌ای بیاورد (که البته به زمان بیشتر و درک بالاتری نیاز دارد)، منجربه ورود اصطلاح‌های تازه‌ای در ریاضیات دبیرستانی شده‌است. هرجا فرصتی دست دهد، از واژهٔ «مجموعه» استفاده می‌شود و آن‌وقت، گمان می‌کنند، جزو پیش‌گامان پژوهش‌های آموزشی درآمده‌اند. این واژه، چنان صورت پررمز و افسانه‌ای پیدا کرده‌است که به‌کلی از اعتبار افتاده و مفهوم واقعی خود را از دست داده‌است . . .».

نظریهٔ مجموعه‌ها یک زبان است، زبانی است برای بیان مفهوم‌ها و درک قانون‌هایی که برطبیعت و جامعه حکومت می‌کنند. برای استفاده از این زبان، باید آن را یاد گرفت و برقاعده‌ها و عمل‌های مربوط به آن مسلط شد. خود

واژهٔ مجموعه، به‌تنهایی از عهدهٔ برطرف کردن هیچ مشکلی برنمی‌آید.

□

کانتور، به‌توصیهٔ استاد ریاضی خود، روی موضوعی کار می‌کرد که، زمانی، فوریه، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، آن را آغاز کرده‌بود؛ درهمین پژوهش‌ها بود که کانتور، به نظریهٔ مجموعه‌ها رسید (و به‌ویژه، مقایسهٔ مجموعه‌های بی‌پایان).

کانتور، به‌جز کشف‌های دیگر خود، به یک موفقیّت اساسی رسید: مقایسهٔ مجموعه‌های بی‌پایان. او روشن کرد که برخی از مجموعه‌های بی‌پایان، هم‌ارزند و برخی دیگر هم‌ارز نیستند. به‌زبان دیگر، «تعداد» عضوها در برخی از مجموعه‌ها، یکی است (که آن‌ها را *مجموعه‌های* هم‌توان نامید) و برخی از مجموعه‌ها نسبت به برخی دیگر «فشرده‌تر» هستند، یعنی توان بالاتری دارند.

گالیله، درزمان خود، معتقد بود که، اگر دو مجموعهٔ بی‌پایان را باهم مقایسه کنیم، به تناقض برخورد می‌کنیم، زیرا تعداد عددهای طبیعی، با تعداد عددهای زوج (که زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی است) برابر درمی‌آید. ولی کانتور، درست از همین‌جا آغاز کرد و نتیجه گرفت، در مجموعه‌های بی‌پایان، این هم‌توانی، امری طبیعی است و هیچ تناقضی درآن وجود ندارد.

وقتی‌که *گاوس*، ریاضی‌دان پرکار و پرنبوغ آلمانی، روی مقدار عدد «پی» بحث می‌کرد، معتقد بود، اگر π را به‌صورت دنباله‌ای از عددها بنویسیم.

۳, ۳/ ۱, ۳/ ۱۴, ۳/ ۱۴۱, ۳/ ۱۴۱۹, . . .

درست است که مرتباً به‌مقدار واقعی عدد π نزدیکتر می‌شویم، ولی از آن‌جا که باید مجموعه‌ای بی‌پایان از عددها و عمل‌ها را درنظر بگیریم، به تناقض برمی‌خوریم (زیرا هرگز نمی‌توانیم به این تعداد بی‌پایان عددها و عمل‌ها دسترسی پیدا کنیم) و، بنابراین، درنظرگرفتن عدد π، به‌عنوان حد این دنباله،

در ریاضیات مجاز نیست. و کانتور، این شجاعت را داشت که این شیوهٔ برخورد با مجموعه‌های بی‌پایان را «مجاز» و «قانونی» اعلام کند و چرخشی عقلانی درجهت تکامل ریاضیات پدید آورد.

ولی درزمان کانتور، ریاضی‌دانانی که با سنت‌های کهنه خو گرفته‌بودند، نمی‌توانستند با پیشنهادهای «انقلابی» او موافق باشند. اگر از معدود کسانی که با او موافق بودند یا، مثل دِدکیند، خودشان هم روی مجموعه‌های بی‌پایان کار می‌کردند، بگذریم، همه به تحقیر و سرزنش کانتور پرداختند.

هانری پوانکاره، ریاضی‌دان سرشناس معاصر کانتور، کارهای کانتور را، نوعی بیماری می‌دانست و هیچ ارزشی برای آن قایل نبود. به‌ویژه *لئوپولد کرونه‌کر*، ریاضی‌دان آلمانی، همهٔ تلاش ذهنی خود را در مخالفت با کانتور گذاشت، او را «شارلاتان» نامید و اعلام کرد: «نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، هیچ ارزش واقعی ندارد».

شدت این حمله‌ها چنان بود که کانتور را دچار بیماری عصبی حادی کرد، به‌نحوی‌که ناچار شد از ریاضیات و از استادی دانشگاه چشم بپوشد. ولی ارثیه‌ای که از خود باقی گذاشت، روزبه‌روز غنی‌تر و کارآتر شد، به‌نحوی که امروز به‌صورت یکی از نیرومندترین زبان‌ها، برای بیان قانون‌های حاکم برطبیعت و جامعه درآمده است.

□

«مجموعه»، یک مفهوم کاملاً کلی است و کارآیی و نیرومندی «نظریهٔ مجموعه‌ها» هم، ناشی از همین کلی بودن و عام بودن آن است. اگر قانونی از نظریهٔ مجموعه‌ها، کشف شود و به‌اثبات برسد، می‌تواند درهرمجموعه‌ای، با هرگونه عضو و هرتعداد عضو، کاربرد داشته‌باشد و، به‌همین مناسبت است که، نظریهٔ مجموعه‌ها، نه‌تنها در ریاضیات، که در همهٔ دانش‌ها از مکانیک

گرفته تا زیست‌شناسی و زبان‌شناسی و دانش‌اجتماعی، کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده‌است.

ولی همین عام بودن مفهوم «مجموعه»، مانعی برای تعریف آن است. معمولاً هر موضوعی را به‌یاری موضوع کلی‌تر ازآن، تعریف می‌کنند:

«انسان، حیوانی است که . . .»؛

«هندسه، بخشی از ریاضیات است که . . .»؛

«زمین، سیاره‌ای است که . . .»؛ . . .

برای تعریف «انسان»، به‌مفهوم کلی‌تر «حیوان»، برای تعریف «هندسه» به‌مفهوم کلی‌تر «ریاضیات»، برای تعریف «زمین» به‌مفهوم کلی‌تر «سیاره» متوسل می‌شویم و غیره. و درجهان، مفهومی کلی‌تر از «مجموعه» وجود ندارد که، باتکیه برآن، بتوانیم «مجموعه» را تعریف کنیم: هر تعریفی از «مجموعه» به‌خود آن برمی‌گردد و به‌اصطلاح منطق قدیم، یک دور باطل تشکیل می‌دهد.

خود کانتور، در تعریف مجموعه می‌گوید:

مجموعه عبارت‌است از یک فراوانی، که در ذهن ما به‌صورت واحد درآمده‌است.

و درجای دیگر:

مجموعه عبارت است از اجتماع گروهی چیز دریک کل، به‌نحوی که احساس یا ادراک ما، توانایی تشخیص آن‌ها را داشته باشد.

ولی اگر در این دوعبارت دقت کنیم، به‌جز این‌که تاحدی همراه با نوعی ابهام هستند، سرآخر، برای تعریف مجموعه، از واژه‌هایی مثل «یک فراوانی» یا «اجتماع گروهی چیز» استفاده شده‌است که معنایی جز معنای واژهٔ «مجموعه» ندارند. اگر بخواهیم این‌گونه تعریف‌ها را، ساده و بی‌پیرایه بیان کنیم، به این‌جا می‌رسیم که بگوییم: «مجموعه، یعنی مجموعه». یعنی تعریف مفهوم به یاری خودش و این، همان دور باطل است.

تعریف یک مفهوم، باید چند ویژگی داشته‌باشد:

۱) همان‌طور که گفتیم، به‌خودش برنگردد. برای تعریف «زمان»، نمی‌توان گفت: «زمان، یعنی مدت حرکت»، زیرا «مدت» بیان دیگری از همان واژهٔ «زمان» است.

۲) بر مفهومی که از خودش دشوارتر و غیرقابل فهم‌تر است، تکیه نکند. اگر برای تعریف «نقطه» بگوییم: «نقطه چیزی است که بُعد و اندازه‌ای ندارد، ولی مکانی را اشغال می‌کند»، به‌مفهوم‌های «بُعد»، «اندازه» و «مکان» تکیه کرده‌ایم که تعریف و درک هرکدام از آن‌ها، از خود «نقطه» دشوارتر است.

۳) مبهم نباشد. جملهٔ «آتش جوهری ناشناخته است که در بسیط یا مرکب بودن آن جدال دارند، ولی وجود دارد و می‌سوزاند»، علاوه‌بر پیچیده بودن، چیزی را روشن نمی‌کند و ماهیت «آتش» را نشان نمی‌دهد.

۴) از ورود غیرخود جلوگیری کند. اگر برای تعریف «مربع» بگویید: «مربع یک چهارضلعی واقع بر صفحه است که سه زاویهٔ قائمه داشته‌باشد»، درواقع، تعریف «مستطیل» را داده‌اید، یعنی با این‌تعریف، نتوانسته‌اید تنها از مربع‌ها صحبت کنید، بلکه تعریف شما شامل شکل‌های دیگری هم می‌شود (مستطیل‌ها) که مربع نیستند.

۵) همهٔ چیزهایی را که درنظر دارید، دربر گیرد. اگر بگویید: «لوزی یک چهارضلعی مسطح است که هم ضلع‌های آن و هم دوقطر آن باهم برابر باشند»، تعریف شما نمی‌تواند شامل لوزی‌هایی شود که مربع نیستند، یعنی قطرهای برابر ندارند.

در منطق قدیم، دو ویژگی ۴) و ۵) را، *شرط‌های مانع و جامع* برای تعریف می‌گفتند. یعنی تعریف باید مانع ورود غیرخود و جامع همهٔ آن‌ها که از خود است، باشد. وحالا می‌فهمیم که: چرا برای «مجموعه» تعریفی وجود ندارد و چرا نباید به‌فکر پیدا کردن تعریفی برای آن باشیم!

تمرین‌ها

۱۳. مجموعه‌ای را نام ببرید که

الف) دارای ده عضو باشد؛
ب) دارای چهار عضو باشد؛
پ) دارای دو عضو باشد؛
ت) دارای یک عضو باشد؛
ث) عضوی نداشته‌باشد.

۱۴. مجموعهٔ نقطه‌های مشترک یک خط راست با یک دایره را در روی صفحه درنظر می‌گیریم. این مجموعه، چند عضو می‌تواند داشته‌باشد؟

۱۵. مجموعهٔ نقطه‌های مشترک دو دایره، چند عضو دارد؟

۱۶. مجموعهٔ نقطه‌های برخورد دو خط راست چند عضو دارد؟

۱۷. آیا مجموعهٔ تهی، همان مجموعهٔ $\{۰\}$ است؟

۱۸. آیا ۱ با $\{۱\}$ فرق دارد؟

*۱۹. آیا مجموعه‌ای می‌تواند عضو خودش باشد؟

۲۰. آیا مجموعه‌های زیر برابرند؟

الف) $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\left\{\frac{۱+۴}{۱۰-۵}, \frac{۴}{۲}, ۳\right\}$

ب) مجموعهٔ مثلث‌هایی که سه ضلع برابر دارند، و مجموعهٔ مثلث‌هایی که سه زاویهٔ برابر دارند؛

پ) مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۱۰، و مجموعهٔ عددهایی که به صفر ختم شده‌اند؛

ت) مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۴ و بر ۶، و مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۲۴؛

ث) $\{۸۳, ۸۹, ۹۱, ۹۷\}$، و مجموعهٔ عددهای اول بین ۸۰ و ۱۰۰؛

ج) مجموعهٔ قمرهای طبیعی زهره، و مجموعهٔ چرخ‌های مربع‌شکل؛

چ) $\left\{۰/۳۵, \frac{۷}{۲۰}, ۱۱\right\}$ و $\left\{\frac{۱/۷۵}{۵}, ۱۱\right\}$.

۲۱. آیا عددهای ۰/۲۵، π، $\frac{۱}{۴}$، یک مجموعهٔ سه‌عضوی تشکیل

می‌دهند؟

۲۲. مجموعهٔ همه کسرهایی را بنویسید که برای هریک از آن‌ها، این شرط‌ها برقرار باشند.

اول، صورت و مخرج هر کسر یک‌رقمی باشد؛

دوم، مقدار هر کسر از واحد کوچکتر باشد؛

سوم، کسرها ساده‌نشدنی باشند.

این مجموعه چند عضو دارد؟ آیا می‌توانید عضوهای این مجموعه را به ردیف صعودی بنویسید، یعنی از کوچکترین کسر آغاز کنید و به بزرگترین کسر برسید؟

۲۳. اگر مجموعهٔ کسرهای بزرگتر از واحد را درنظر بگیریم که قابل ساده‌شدن نباشند و صورت و مخرج آن‌ها عددهای یک‌رقمی باشد، ۸ عضو کمتر از مجموعهٔ تمرین ۲۲ پیدا می‌کند. چرا؟

*۲۴. عضوهای مجموعه‌های A، B و C را مشخص کنید:

$$A = \{x | x - ۲ = ۵\}; \quad B = \{x | x^{۲} = ۴\};$$

$C = \{x |$ حرفی است از واژهٔ «دوستی» $x\}$

*۲۵. کدامیک از این مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ تهی است:

$$M = \{x | x^{۲} + ۱ = ۰\}; \quad B = \{x | x + ۱ = ۱\}$$

۲۶. اگر داشته‌باشیم $F = \{۱, ۰\}$، کدامیک درست است:

الف) $\{۰\} \in F$؛ ب) $\phi \subset F$؛

پ) $\{۰\} \subset F$؛ ت) $۰ \in F$؛

ث) $۰ \subset F$؛ ج) $\{۰, ۱\} \subset F$

۲۷. $\{\{۰, ۱\}\}$ چه معنایی دارد؟

۲۸. کدامیک از این رابطه‌ها درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\{۲\} \subset \{۴\}$؛ ب) $۲ \in \{۴\}$؛

پ) $\{۱, ۲\} \in \{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}$؛

ت) $\{۱, ۲\} \subset \{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}$؛

ث) $\{۱, ۲\} \in \{\{۱, ۲\}, ۳, ۴\}$

ج) $\{۱, ۲\} \subset \{\{۱, ۲\}, ۳, ۴\}$.

۲۹. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\phi \in \{\phi\}$؛ ب) $\phi \subset \{\phi\}$

پ) $\phi \in \{\phi, \{\phi\}\}$؛ ت) $\phi \subset \{\phi, \{\phi\}\}$؛

ث) $\{\phi\} \in \{\phi, \{\phi\}\}$؛ ج) $\{\phi\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$؛

چ) $\{\{\phi\}\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$

***۳۰.** می‌دانیم:

$$A = \{x | x^۲ + ۳ = ۰\} \text{ و } B = \{x | x = ۲\}$$

آیا $A \subset B$؟

۳۱. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{۱, ۴, ۳\} = \{۳, ۴, ۱\}$

ب) $\{۱, ۲, ۱, ۳, ۱, ۲\} = \{۱, ۲, ۳\}$؛

پ) $\{۴\} \in \{\{۴\}\}$؛ ج) $\{۴\} \subset \{\{۴\}\}$.

۳۲. بافرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$، همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

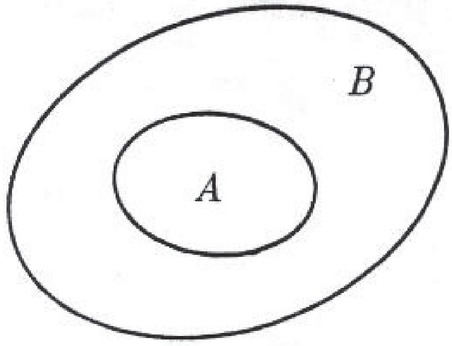
۳۳. همهٔ زیرمجموعه‌های $B = \{x, y, z\}$ را بنویسید.

۳۴. این مجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم (شکل‌های روی صفحه موردنظر است):

مجموعهٔ لوزی‌ها؛ مجموعهٔ همهٔ چهارضلعی‌ها؛

مجموعهٔ همهٔ مربع‌ها؛ مجموعهٔ همه ذوزنقه‌ها؛

مجموعهٔ همه متوازی‌الاضلاع‌ها؛ مجموعهٔ همهٔ مستطیل‌ها.



شکل ۸

کدام مجموعه، زیرمجموعهٔ دیگری است؟

۳۵. A یک مجموعه است و می‌دانیم $A \subset \phi$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۶. باتوجه به شکل ۸، کدام درست است: $A \in B$ یا $A \subset B$؟

۳۷. A مجموعهٔ عددهای طبیعی، B مجموعهٔ عددهای زوج و C مجموعهٔ عددهای فرد است. چه رابطه‌ای بین این مجموعه‌ها وجود دارد؟

***۳۸.** برای مجموعهٔ

$$M = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, n\}$$

که دارای n عضو است، چند زیرمجموعه می‌توان نوشت؟

۳۹. M را مجموعهٔ چندضلعی‌ها، A را مجموعهٔ همهٔ چهارضلعی‌ها، B را مجموعهٔ همهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها، C را مجموعهٔ همهٔ مستطیل‌ها، D را مجموعهٔ همهٔ مربع‌ها و F را مجموعهٔ همهٔ مثلث‌ها می‌گیریم. این مجموعه‌ها را به‌یاری نمودار وِن نشان دهید.

۲. عمل با مجموعه‌ها

§۱. اجتماع دو مجموعه

گمان می‌کنم، این «چیستان» را شنیده‌باشید که: «سه سیب، بین دو دختر و دو مادر تقسیم کردند، به‌هرکدام، یک سیب کامل رسید.چطور ممکن است؟»

حل چیستان ساده است: دراین‌جا، تنها با سه‌نفر سروکار داریم، دختر، مادر و مادربزرگ. مادر، نسبت به دختر، مادر است و، نسبت به مادربزرگ، دختر؛ پس «دو دختر، یعنی دختر و مادر» و «دو مادر یعنی مادر و مادربزرگ» روی‌هم سه‌نفر.

اگر دو مجموعه را درنظر بگیریم: مجموعهٔ اول (که آن را A می‌نامیم)، شامل «مادر و مادربزرگ» و مجموعهٔ دوم (که آن را B می‌نامیم) شامل «دختر و مادر»:

$A = \{$ مادر و مادربزرگ $\}$ و $B = \{$ دختر و مادر $\}$

مادر، درهر دومجموعه حضور دارد، پس وقتی جمع آن‌ها را درنظر بگیریم، باید تنها یکبار از «مادر» اسم ببریم. می‌گویند، اجتماع این دومجموعه سه عضو دارد و این‌طور می‌نویسند:

$A \cup B = \{$ دختر و مادر و مادربزرگ $\}$

$\cup$، نماد عمل اجتماع است و گاهی به‌آن «ناو» هم می‌گویند: $A \cup B$، یعنی اجتماع A و B یا «A ناو B».

به‌این‌ترتیب، می‌توان تعریف زیر را پذیرفت:

اجتماع دومجموعه A و B، مجموعه‌ای است که از عضوهای A و B پدید آمده‌باشد، به‌زبان دیگر:

هرعضو مجموعهٔ $A \cup B$، یا عضو مجموعهٔ A است، یا عضو مجموعهٔ B ویا عضو هردوی آن‌ها؛ برعکس، هرعضو A و هرعضو B، عضوی از مجموعهٔ $A \cup B$ است.

از تعریف اجتماع، بلافاصله، چند نتیجه به‌دست می‌آید:

نتیجه ۱. در مجموعه‌های باپایان تعداد عضوهای $A \cup B$، یا برابر است با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعهٔ A و B، ویا از این مجموع کمتر است.

درواقع، اگر دو مجموعهٔ A و B، عضو مشترکی نداشته‌باشند، تعداد عضوهای $A \cup B$، با مجموع تعداد عضوهای A و B برابر می‌شود:

$$A = \{۲, ۴, ۶\} \text{ و } B = \{۱, ۳, ۵\};$$
$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

مجموعه‌های A و B، هرکدام سه عضو و مجموعهٔ $A \cup B$، ۶ عضو دارد. دراین‌حالت، مجموعه‌های A و B را، جداازهم گویند:

دومجموعه، وقتی *جداازهم* هستند که، عضو مشترکی *نداشته‌باشند*. ولی، اگر دو مجموعهٔ باپایان، جدا ازهم نباشند، یعنی عضو یا عضوهای مشترک داشته‌باشند، آن‌وقت، تعداد عضوهای $A \cup B$، از مجموع تعداد عضوهای A و B کمتر می‌شود:

$$A = \{۲, ۴, ۸, ۱۶\} \text{ و } B = \{۲, ۴, ۶, ۸\};$$
$$A \cup B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۶\}$$

مجموعهٔ A، ۴ عضو و مجموعهٔ B، ۴ عضو دارد؛ ولی مجموعهٔ $A \cup B$، بیش‌از ۵ عضو ندارد؛ عضوهای ۲، ۴ و ۸، در دو مجموعهٔ A و B مشترک بود و، بنابراین، در مجموعهٔ $A \cup B$ تکرار نشدند.

نتیجه۱، نخستین اختلاف، «عمل اجتماع» در مجموعه‌ها، با «عمل جمع» در حساب است.

ولی این، تنها اختلاف «اجتماع» با «جمع» نیست. در حساب، اگر عددی را با خودش جمع کنیم، دوبرابر می‌شود، ولی در مجموعه‌ها:

نتیجهٔ ۲. اجتماع یک مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است:

$$A \cup A = A$$

که درستی آن روشن است. همچنین

نتیجهٔ ۳. اگر B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A باشد، آن‌وقت، اجتماع دو مجموعهٔ A و B، برابر مجموعهٔ A می‌شود:

اگر $B \subset A$، آن‌وقت $A \cup B = A$

یادداشت. در ریاضیات، وقتی از فرضی یا حکمی به نتیجه‌ای برسند، بین فرض و نتیجه، نماد $\Rightarrow$ را می‌گذارند که می‌توان آن را به‌معنای «نتیجه می‌دهد» گرفت:

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

یعنی، فرض $B \subset A$، نتیجه می‌دهد $A \cup B = A$. روشن‌است که دراین‌جا، عکس این رابطه هم درست است، یعنی از فرض $A \cup B = A$ می‌توان نتیجه گرفت: $B \subset A$:

$$A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$$

وقتی رابطهٔ «نتیجه‌گیری» دوطرفه باشد، می‌توان نماد $\Leftrightarrow$ را به‌کار برد:

$$B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$$

یعنی، اگر سمت چپ درست باشد، سمت راست درست است و برعکس.

نماد $\Rightarrow$ را نماد «اگر ... آن‌گاه ...» هم می‌گویند. یعنی، به‌جای آن‌که بنویسید:

اگر $B \subset A$، آنگاه $A \cup B = A$ می‌نویسند

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

دراین‌صورت، نماد $\Leftrightarrow$ را «اگر ... آن‌گاه ... و برعکس» می‌نامند.

$\square$

ولی از تعریف اجتماع، نتیجه‌های دیگری هم می‌توان گرفت که با ویژگی‌های عمل جمع (در حساب) شباهت دارد.

نتیجهٔ ۴. A هر مجموعه‌ای باشد، در اجتماع با مجموعهٔ «تهی» برابر A می‌شود:

$$A \cup \phi = A$$

درواقع، دراین‌جا، مجموعهٔ تهی، نقش عدد صفر را در «جمع» به‌عهده دارد:

مجموع هر عدد باصفر، برابر همان عدد است؛ و

اجتماع هر مجموعه با ϕ، برابر همان مجموعه است.

نتیجهٔ ۵. عمل اجتماع، دارای ویژگی جابه‌جایی است، یعنی

$$A \cup B = B \cup A$$

(شبیه همین ویژگی در حساب: $a + b = b + a$).

نتیجهٔ ۶. عمل اجتماع مجموعه‌ها، دارای ویژگی شرکت‌پذیری است، یعنی

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

و بنابراین، می‌توان اجتماع سه مجموعه را به‌صورت

$$A \cup B \cup C$$

نوشت و عمل‌ها را، به‌ردیف (چه از چپ به‌راست و چه از راست به‌چپ) درنظر گرفت.

این ویژگی هم، با ویژگی نظیر خود درجمع شباهت دارد:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

که می‌توان آن را به‌صورت $a+b+c$ نوشت.

مثال ۱. اجتماع سه مجموعهٔ A و B و C را پیدا کنید، به‌شرطی‌که

$$A=\{۲,۳,۵,۷\}; \quad B=\{۱,۳,۵,۷,۹\};$$
$$C=\{۲,۴,۶,۸\}$$

حل. داریم:

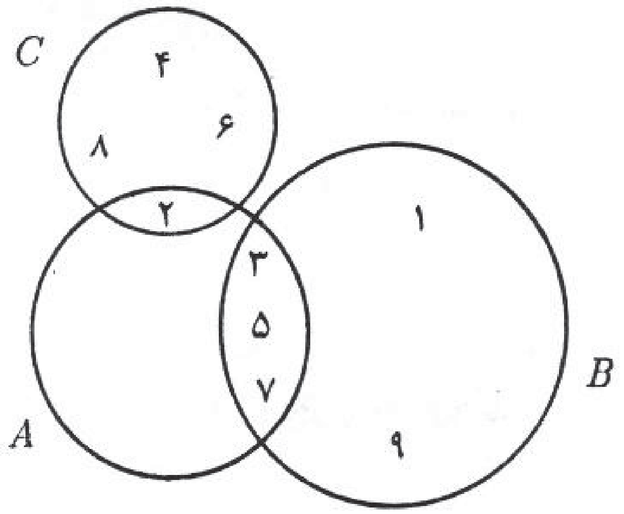
$$A \cup B=\{۱,۲,۳,۵,۷,۹\}$$
$$A \cup B \cup C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

در شکل ۹، پاسخ مساله، به‌کمک نمودار وِن داده شده‌است.

مثال ۲. ثابت کنید $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$.

حل. چون $A \cup B=B \cup A$، کافی است یکی از دو حکم را ثابت کنیم: A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $A \cup B$ است. باید ثابت کنیم، اگر $x \in A$، آن‌وقت $x \in A \cup B$. وقتی x عضو A باشد، می‌توانیم بگوییم: x عضو A یا عضو B است و، دراین‌صورت عضو $A \cup B$ خواهدبود.

مثال ۳. ثابت کنید، از $A \cup B=\phi$، نتیجه می‌شود: $A=\phi$ و $B=\phi$.

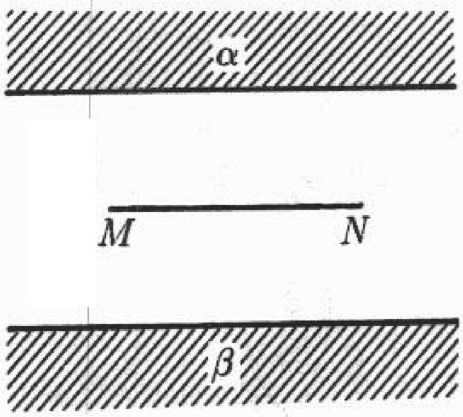


شکل ۹

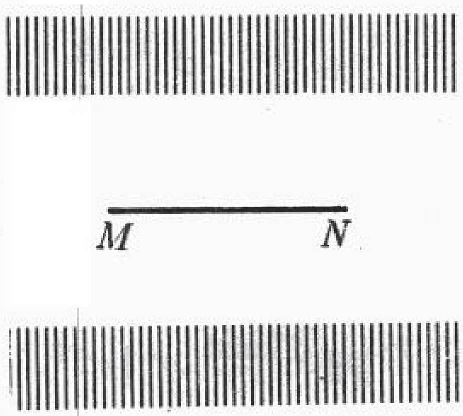
حل. می‌دانیم $A \subset (A \cup B)$ (مثال ۲ را ببینید)؛ بنابراین $A \subset \phi$. از طرف دیگر، مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است، یعنی $\phi \subset A$. پس $A = \phi$. همین استدلال را دربارهٔ B هم می‌توان انجام داد.

مثال ۴. پاره‌خط راست MN را به‌طول ۲ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. مجموعهٔ رأس‌های همهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقینی را درنظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن‌ها، پاره‌خط راست MN باشد و مساحت هریک از آن‌ها، کمتر از یک سانتی‌متر مربع نشود. این مجموعه، از اجتماع دو مجموعهٔ دیگر به‌دست می‌آید. کدام دومجموعه؟

حل. چون طول قاعدهٔ هریک از این مثلث‌ها برابر ۲ سانتی‌متر است، باید ارتفاع هرکدام، طولی برابر یا بزرگتر از ۱ سانتی‌متر داشته‌باشد، تا مساحت مثلث از ۱ سانتی‌متر مربع کمتر نشود. بنابراین، مجموعهٔ رأس‌های این مثلث‌ها، اجتماع دو مجموعهٔ جداازهم است: یکی مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر نیم‌صفحه α (شکل ۱۰)دربالای پاره‌خط راست MN، به‌نحوی که مرز آن به‌فاصلهٔ یک سانتی‌متر از MN باشد؛ دیگری مجموعهٔ نقطه‌های



شکل ۱۰



شکل ۱۱

روی نیم‌صفحهٔ β واقع در پایین پاره‌خط است MN، به‌نحوی که مرز آن از MN به‌فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر باشد. می‌توان مجموعهٔ رأس‌های این مثلث‌ها را، اجتماعی از دومجموعهٔ دیگر دانست: اجتماع دو دسته نیم‌خط راست عمود بر MN، به‌نحوی که آغاز هریک از نیم‌خط‌های راست، به‌فاصله ۱ سانتی‌متری پاره‌خط راست MN واقع باشند؛ این دو مجموعهٔ نیم‌خط‌های راست، در دوطرف پاره‌خط راست MN واقع‌اند. روی (شکل ۱۱) ، برخی از نیم‌خط‌های راست رسم شده‌اند.

مثال ۵. در شهری، روزنامه‌های a و b منتشر می‌شوند. دربارهٔ علاقه‌مندان به این دو روزنامه، از ۸۰۰ نفر پرسیدند. معلوم شد ۴۳۰ نفر

روزنامه a را می‌خوانند و ۲۲۰ نفر، روزنامهٔ b را. درضمن، روشن شد، ۱۸۰ نفر به هردو روزنامه علاقه‌مندند و هردو را می‌خوانند. از این ۸۰۰ نفر، چند نفر هیچ‌کدام از روزنامه‌های a و b را نمی‌خوانند؟

حل. دو مجموعه درنظر می‌گیریم:

$A = \{$علاقه‌مندان روزنامهٔ $a\}$ و $B = \{$علاقه‌مندان روزنامهٔ $b\}$

این دو مجموعه، جدا از هم نیستند، زیرا ۱۸۰ نفر به هردو روزنامه علاقه‌مندند. بنابراین (باتوجه به نتیجهٔ ۱)، تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$، از مجموع تعداد عضوهای دو مجموعهٔ A و B، به‌اندازهٔ ۱۸۰ عضو کمتر است:

تعداد عضوهای مجموعهٔ A = ۴۳۰;

تعداد عضوهای مجموعهٔ B = ۲۲۰

تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه A و B = ۱۸۰

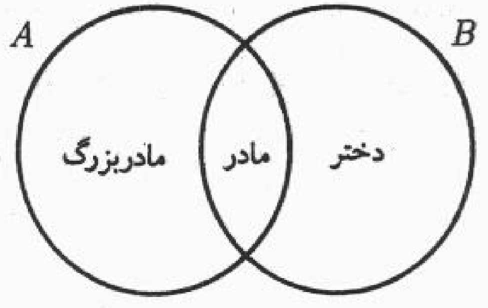
تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ = (۴۳۰ + ۲۲۰) − ۱۸۰ =

= ۶۵۰ − ۱۸۰ = ۴۷۰

یعنی از ۸۰۰ نفر، تنها ۴۷۰ نفر روزنامه می‌خوانند (یا روزنامه a، یا روزنامهٔ b ویا هردو)، پس بقیهٔ افراد، روزنامه‌ای نمی‌خوانند.

۸۰۰ − ۴۷۰ = ۳۳۰

یادداشت. فقط یادآوری می‌کنیم که گاهی، بعضی از نویسندگان کتاب‌های ریاضی، اجتماع را **حاصل جمع منطقی** نامیده‌اند. این اصطلاح، بیشتر مربوط به «منطق ریاضی» است، ولی منظور ازآن، همان اجتماع دو یا چند مجموعه است.



شکل ۱۲

همچنین، گاهی برای اجتماع، به‌جای نماد $\cup$، از نماد $+$ (نماد جمع) استفاده می‌کنند.

این یادداشت را به‌این‌منظور آوردیم که، اگر درجایی، ضمن بحث دربارهٔ مجموعه‌ها، به اصطلاح «حاصل‌جمع منطقی» ویا نماد «$+$» برخورد کردید، گمراه نشوید، والا دراین کتاب، از آن‌ها استفاده نخواهیم‌کرد.

§۲. اشتراک دو مجموعه

به همان چیستانِ «تقسیم سه سیب بین دو مادر و دو دختر» برگردیم. در آن‌جا با دو مجموعهٔ A و B سروکار داشتیم که هرکدام دو عضو داشت:

$A = \{$ مادر , مادربزرگ $\}$ و $B = \{$ دختر , مادر $\}$

ولی عضو مادر در دو مجموعه مشترک بود. این وضع را در (شکل ۱۲)، با نمودار وِن نشان داده‌ایم. عضو «مادر» را، **اشتراک** دو مجموعهٔ A و B گویند:

اشتراک دو مجموعهٔ A و B، خودش یک مجموعه است و، عضوهای آن، آن‌هایی هستند که هم عضو مجموعهٔ A باشند و هم عضو مجموعهٔ B.

عمل اشتراک را با نماد $\cap$ نشان می‌دهند. دراین مثال

$A \cap B = \{$ مادر $\}$

به چند صفحهٔ قبل و مثال ۱ (شکل ۹) مراجعه کنید. درآن‌جا با سه مجموعه سروکار داشتیم:

$$A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}; \quad B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\};$$
$$C = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$

با تعریفی که برای «اشتراک دو مجموعه» دیدیم، به‌سادگی روشن می‌شود که

$$A \cap B = \{۳, ۵, ۷\} \text{ و } A \cap C = \{۲\};$$
$$B \cap C = \phi$$

مثال ۶. این مجموعه‌ها داده شده‌اند:

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{a, b, e\};$$
$$C = \{b, c, f, g, h\}$$

این مجموعه‌ها را روی نمودار وِن نشان دهید و $A \cap B$، $A \cap C$، $B \cap C$ و $A \cap B \cap C$ را پیدا کنید.

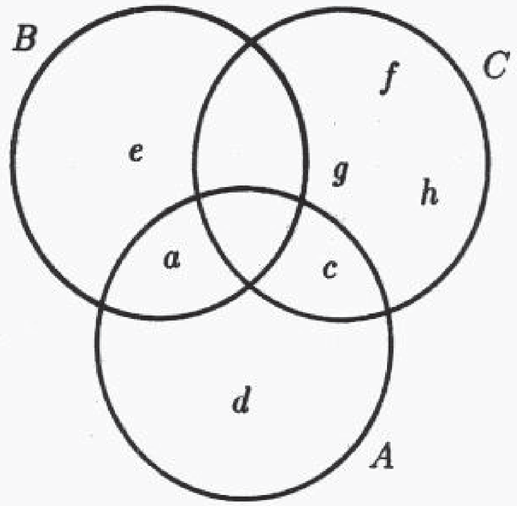
حل. روی شکل ۱۳، همه‌چیز دیده می‌شود:

$$A \cap B = \{a, b\}; \quad A \cap C = \{b, c\};$$
$$B \cap C = \{b\}; \quad A \cap B \cap C = \{b\}$$

از تعریف اشتراک دویا چند مجموعه هم، می‌توان نتیجه‌هایی به‌دست آورد:

نتیجهٔ ۱. اشتراک دارای ویژگی جابه‌جایی است، یعنی

$$A \cap B = B \cap A$$



شکل ۱۳

نتیجهٔ ۲. اشتراک دارای ویژگی شرکت‌پذیری است، یعنی

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

همین ویژگی شرکت‌پذیری، به‌ما اجازه می‌دهد، از پرانتز صرف‌نظر کنیم و بنویسیم: $A \cap B \cap C$؛ همان‌گونه که در مثال ۶ دیدیم.

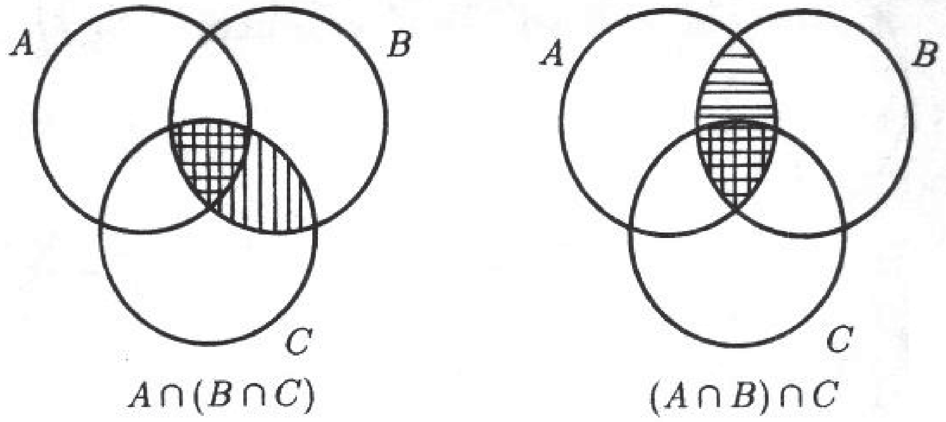
درستی نتیجه‌های ۱ و ۲ روشن است؛ باوجوداین، درستی نتیجهٔ ۲ را درشکل ۱۴ روی نمودار وِن نشان داده‌ایم.

در این شکل $A \cap B$ با هاشور افقی، $B \cap C$ با هاشور قائم و $A \cap B \cap C$ با هاشور دوگانه نشان داده شده‌است.

❋ از حساب و جبر می‌دانیم، جمع نسبت به ضرب، دارای ویژگی پخشی است، یعنی

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

همین ویژگی در مجموعه‌ها هم وجود دارد:



شکل ۱۴

*نتیجهٔ ۴. اشتراک، نسبت به اجتماع دارای ویژگی پخشی است، یعنی

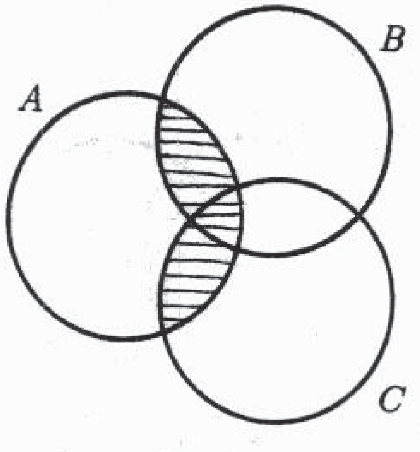
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (۱)$$

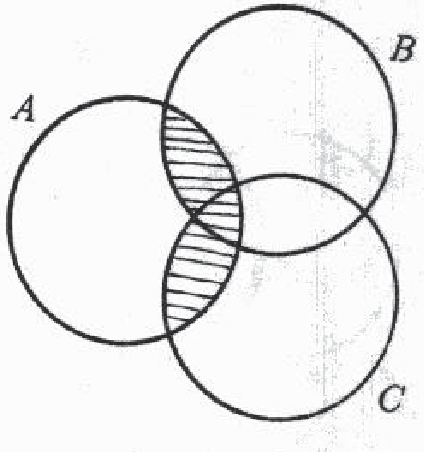
باید ثابت کنیم، اگر x عضوی از مجموعهٔ سمت چپ برابری باشد، حتماً عضوی از مجموعهٔ سمت راست برابری‌است‌وبرعکس.

فرض می‌کنیم x عضو مجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ باشد. دراین‌صورت، x عضو مشترک دومجموعهٔ A و $B\cup C$ است؛ درضمن عضو مجموعهٔ $B\cup C$ یعنی یا عضو B یا عضو C (یا عضو هردو). پس x عضو مشترک A و B یا عضو مشترک A و C است. و این همان توضیح مجموعهٔ سمت راست برابری (۱) است. به‌همین‌ترتیب، روشن می‌شود، اگر x عضو مجموعهٔ سمت راست برابری (۱) باشد، درضمن عضو مجموعهٔ سمت چپ برابری(۱) هم خواهدبود. درشکل ۱۵، دو مجموعهٔ سمت چپ و سمت راست برابری (۱) با نمودار وِن نشان داده شده‌است.

مثال ۷. اگر داشته‌باشیم

$$A=\{a,b,c\};$$
$$B=\{b,c,d\};\quad C=\{e,f\}$$





شکل ۱۵

مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cap C$، $B\cap C$، $A\cap B\cap C$ و $A\cap B\cap\phi$ را تشکیل دهید.

پاسخ

$$A\cap B=\{b,c\};\quad A\cap C=\phi,\quad B\cap C=\phi$$
$$A\cap B\cap C=\phi;\quad A\cap B\cap\phi=\phi$$

نتیجهٔ ۴. اگر $B\subset A$، آن‌وقت $A\cap B=B$

نتیجه ۵. همیشه $A\cap\phi=\phi$

نتیجهٔ ۶. همان‌طور که در مثال ۷ دیدیم، اشتراک دو مجموعهٔ جدا ازهم، یک مجموعهٔ تهی است.

باز هم چند مثال:

مثال ۸. ثابت کنید: $A\subset(A\cap B)$ و $B\subset(A\cap B)$ و ازآن‌جا نتیجه بگیرید $A\cap A=A$.

حل. $x\in(A\cap B)$، به‌معنای آن است که x عضو مشترک دو مجموعهٔ A و B است،یعنی $x\in A$ و $x\in B$. بنابراین، هرعضو مجموعهٔ $A\cap B$ به‌ناچار عضو مجموعهٔ A است، یعنی $A\cap B$ زیرمجموعه‌ای

از A است؛ همچنین، هر عضو $A \cap B$ باید عضوی از B باشد، یعنی $(A \cap B) \subset B$.

برای اثبات $A \cap A = A$، باید ثابت کنیم $(A \cap A) \subset A$ و $A \subset (A \cap A)$ رابطهٔ اول را دربخش اول همین مساله ثابت کردیم: $(A \cap A) \subset A$. برای اثبات رابطهٔ دوم گوییم، اگر $x \in A$، آن‌وقت می‌توانیم تکرار کنیم: x هم عضو A است وهم عضو A، یعنی عضو $A \cap A$ است، پس $A \subset (A \cap A)$.

مثال ۹. M را مجموعهٔ مرجع و A' را متمم مجموعهٔ A نسبت به M و، همچنین B' را متمم B و C' را متمم C نسبت به مجموعهٔ مرجع M می‌گیریم. اگر داشته‌باشیم

$$M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\};$$
$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}; \quad B = \{۲, ۴, ۶, ۸\};$$
$$C = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$$

مطلوب است تعیین A'، B'، $(A \cap C)'$، $(A \cup B)'$ و $(A')'$.

حل. پاسخ. $A' = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$؛ $B' = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$؛ چون $A \cap C = \{۳, ۴\}$ پس

$$(A \cap C)' = \{۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

چون $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸\}$، پس $(A \cup B)' = \{۵, ۷, ۹\}$؛ چون $A' = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$، پس $(A')' = \{۱, ۲, ۳, ۴\} = A$.

مثال ۱۰. از ۷۳ نفر دانش‌آموز سال سوم دبیرستان، ۱۸ نفر در انجمن ریاضی، ۲۴ نفر در انجمن فیزیک و ۲۶ نفر در انجمن موسیقی شرکت کرده‌اند و ۲۳ نفر عضو هیچ‌کدام از این انجمن‌ها نیستند. از کسانی که در

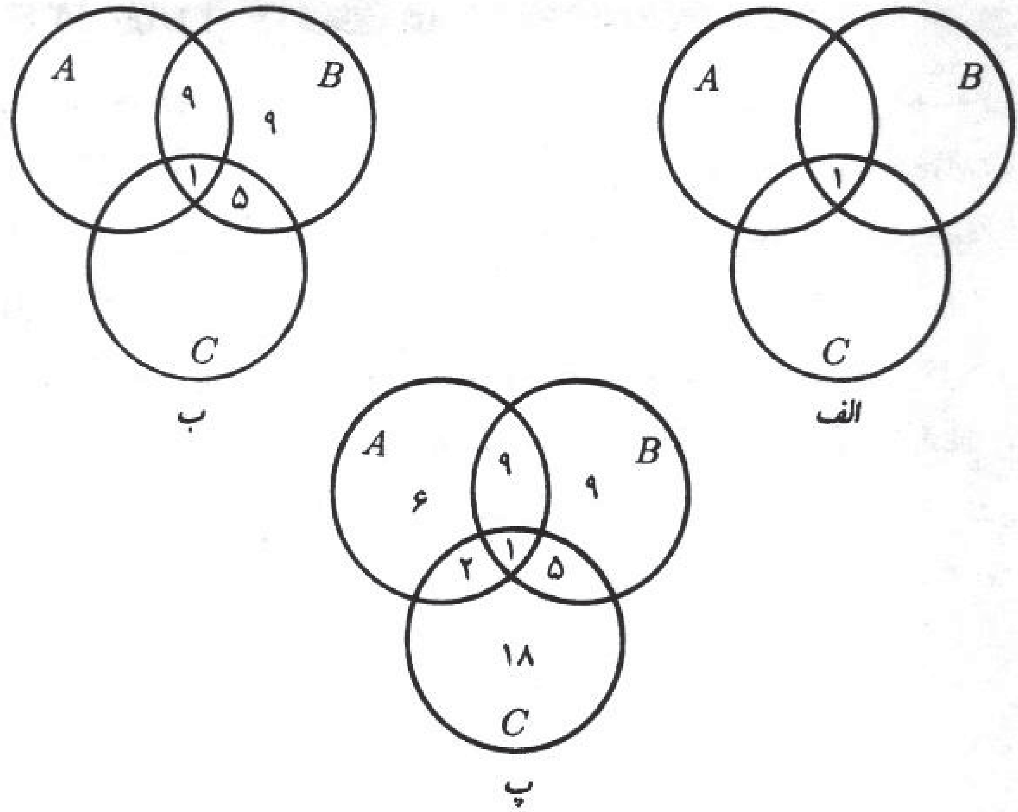
انجمن فیزیک کار می‌کنند، ۱۰ نفر در انجمن ریاضی و ۶ نفر در انجمن موسیقی هم شرکت می‌کنند؛ ولی تنها یک‌نفر در هرسه انجمن عضو است. چند دانش‌آموز در هردو انجمن ریاضی و موسیقی عضویت دارند؟

حل. مجموعهٔ دانش‌آموزان انجمن ریاضی را A، مجموعهٔ دانش‌آموزان انجمن فیزیک را B و مجموعهٔ دانش‌آموزان انجمن موسیقی را C می‌نامیم. تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B \cup C$ برابر ۵۰ نفر است (زیرا از ۷۳ دانش‌آموز، ۲۳ نفر درهیچ انجمنی عضویت ندارند. درضمن می‌دانیم، تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cap B$ برابر ۱۰، تعداد عضوهای مجموعهٔ $B \cap C$ برابر ۶ و تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cap B \cap C$ برابر واحد است. می‌خواهیم تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cap C$ را پیدا کنیم.

دراین‌گونه مساله‌ها، ساده‌ترین روش حل، استفاده از نمودار وِن است. سه دایره دوبه‌دو متقاطع (یکی نمایندهٔ انجمن ریاضی، دیگری نمایندهٔ انجمن فیزیک و سومی نمایندهٔ انجمن موسیقی: A، B و C) رسم می‌کنیم.

ابتدا، عدد ۱ را دربخش مشترک سه دایره می‌گذاریم (شکل ۱۶ الف)، زیرا تعداد عضوهای اشتراک سه مجموعهٔ A و B و C برابر واحد است. حالا، بخش مشترک دو مجموعهٔ A و B را درنظر می‌گیریم که خود شامل دو قسمت است و دریکی از آن‌ها (بخش مشترک سه دایره) عدد ۱ وجود دارد؛ بنابراین باید در دیگری عدد ۹ را قرار دهیم (زیرا تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cap B$ برابر ۱۰ بود). به‌همین‌ترتیب، چون تعداد عضوهای مجموعهٔ $B \cap C$ برابر ۶ است، در بخش مشترک دوم دو دایرهٔ B و C، عدد ۵ را قرار می‌دهیم (شکل ۱۶ـب).

اگر دو انجمن ریاضی و موسیقی، عضو مشترک نداشته‌باشند، آن‌وقت، ۸ عضو باقی‌ماندهٔ انجمن ریاضی و ۲۰ عضو باقی‌ماندهٔ انجمن موسیقی با ۲۴ عضو انجمن فیزیک، روی‌هم ۵۲ نفر می‌شوند که ۲ نفر از تعداد کل دانش‌آموزان ما (که در انجمن‌ها شرکت دارند) بیشتر است. بنابراین ۲ نفر در



شکل ۱۶

هردو انجمن ریاضی و موسیقی (به‌جز یک‌نفری که در هرسه انجمن شرکت می‌کرد) عضویت دارند. طرح کامل مساله در شکل ۱۶ـپ داده شده‌است.

***یادداشت.** ۱) نماد اشتراک، یعنی $\cap$ را «تاق» هم می‌نامند؛ مجموعهٔ $A \cap B$ را می‌خوانند: «اشتراک دو مجموعهٔ A و B» یا «A تاق B».

۲) «اشتراک دو مجموعه را «برخورد» یا «مقطع» آن‌ها هم نامیده‌اند.

۳) همچنین اشتراک دو مجموعهٔ A و B را، «حاصل‌ضرب منطقی» مجموعه‌های A و B می‌گویند و به‌صورت $A \cdot B$ نشان می‌دهند.

ولی دراین کتاب، همه‌جا از نماد $\cap$ و اصطلاح «اشتراک» استفاده کرده‌ایم. یادآوری نمادها و اصطلاح‌های دیگر، برای این است که، اگر درکتابی با آن‌ها برخوردید، سردرگم نشوید.

§۳. تفاضل دومجموعه

بازپرس که دربارهٔ یک جنایت تحقیق می‌کرد، به‌این نتیجه رسید که، جنایت‌کار، باید یکی از ۵ نفر a، b، c، d یا e باشد. ولی متوجه شد در زمان جنایت، b و c و e در زندان بوده‌اند. بنابراین a و d را احضار کرد و تحقیق خود را روی آن‌ها متمرکز کرد.

بازپرس، از عمل تفریق مجموعه‌ها استفاده کرد و تحقیق را روی دو مجموعه انجام داد. اگر مجموعهٔ افراد مظنون را A و مجموعهٔ زندانیان را B بنامیم، بازپرس، همهٔ عضوهای مشترک دومجموعهٔ A و B را از A کنار می‌گذارد و دایرهٔ عمل خودرا کوچکتر می‌کند، یعنی به‌جای ۵ نفر، به ۲ نفر مظنون می‌شود.

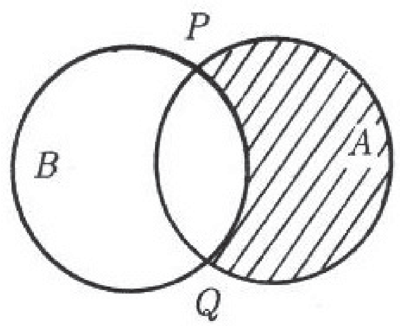
$$A = \{a, b, c, d, e\};$$
$$B = \{\dots, b, c, e, \dots\};$$
$$A - B = \{a, d\}$$

تفاضل دو مجموعهٔ A و B، عبارت است از مجموعهٔ $A - B$ که، عضوهای آن، عبارتند از همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ A که عضو مجموعهٔ B نیستند.

توجه کنیم، برای کم کردن مجموعهٔ B از مجموعهٔ A، لازم نیست B از A «کوچکتر» باشد (یعنی تعداد کمتری عضو داشته‌باشد) و مثلاً لازم نیست B زیرمجموعه‌ای از A باشد: کم کردن B از A، یعنی بیرون کردن عضوهای مشترک A و B، از مجموعهٔ A:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

تفاضل $A - B$، روی نمودار وِن روی شکل ۱۷ نشان داده شده‌است (بخش هاشور خوردهٔ مجموعهٔ A). البته نقطه‌های واقع بر کمان PQ را نباید جزو



$A - B$

شکل ۱۷

مجموعهٔ $A - B$ به‌شمار آورد. اگر A، مجموعهٔ دانش‌آموزان سال اول دبیرستان شما و B، مجموعهٔ دانش‌آموزان تیم والیبال همهٔ دبیرستان باشد، $A - B$ به‌معنای مجمـوعهٔ دانش‌آموزانی از سال اول دبیرستان است که عضو تیم والیبال مدرسه نیستند.

درحالت خاص، وقتی B زیرمجموعه‌ای از A باشد، $A - B$، همان متمم مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ A می‌شود. اگر متمم مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ A را با نماد B'_A نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$B \subset A \Leftrightarrow A - B = B'_A$$

دوطرفه بودن این رابطه روشن است، یعنی اگر تفاضل $A - B$ برابر متمم B نسبت به مجموعهٔ A باشد، به‌معنای آن است که B زیرمجموعه‌ای از A است. مثلاً اگر A را مجموعهٔ همهٔ لوزی‌ها و B را مجموعهٔ همهٔ مربع‌ها بگیریم، آن‌وقت $A - B$، شامل لوزی‌هایی است که قطرهای نابرابر دارند و، این لوزی‌ها، همان متمم مجموعهٔ مربع‌ها نسبت به مجموعهٔ همهٔ لوزی‌ها است. یا اگر A را مجموعهٔ عددهای طبیعی و B را مجموعهٔ عددهای فرد طبیعی بگیریم، چون $A - B$ برابر مجموعهٔ عددهای زوج طبیعی است، پس نتیجه می‌گیریم که $B \subset A$.

مثال ۱۱. اگر بدانیم:

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}; \quad B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}; \quad C = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$$

مجموعه‌های $A-B$، $C-A$، $B-C$، $B-A$ و $B-B$ را پیدا کنید.

پاسخ.

$$A-B=\{۱,۳\};\quad C-A=\{۵,۶\};$$
$$B-C=\{۲,۸\};\quad B-A=\{۶,۸\};\quad B-B=\phi$$

مثال ۱۲. ثابت کنید:

الف) $(A-B)\subset A$، ب) $(A-B)\cap B=\phi$.

حل. الف) اگر x عضوی از مجموعهٔ $A-B$ باشد، بنابه‌تعریف باید داشته‌باشیم: $x\in A$ و $x\notin B$، یعنی به‌ویژه $x\in A$. به‌این‌ترتیب، $x\in(A-B)$، به‌معنای $x\in A$ است و درنتیجه $(A-B)\subset A$.

ب) شبیه حالت الف) داریم:

$$x\in(A-B)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\notin B\end{cases}$$

بنابراین، چون عضو x باید با $x\in B$ و $x\notin B$ سازگار باشد، داریم.

$$(A-B)\cap B=\phi$$

مثال ۱۳. A' متمم مجموعهٔ A است. ثابت کنید:

$$B-A'=B\cap A$$

حل. $x\in(B-A')$ به‌معنای $x\in B$ و $x\notin A'$ است و، شرط اخیر به‌معنای $x\in B$ و $x\in A$ است (اگر یک مجموعهٔ مرجع داشته‌باشیم، آن‌وقت برای هر مجموعه‌ای مثل A که از این مجموعهٔ مرجع گرفته شده‌است، یا $x\in A$ ویا $x\in A'$؛ بنابراین از $x\notin A'$ نتیجه می‌شود $x\in A$).

ولی وقتی x عضو هردو مجموعهٔ B و A باشد، به‌معنای آن است که عضو مجموعهٔ اشتراک آن‌ها، یعنی $B \cap A$ است.

برعکس، اگر $x \in B \cap A$، آن‌وقت $x \in B$ و $x \in A$؛ یعنی $x \in B$ و $x \notin A'$ بنابراین $x \in (B - A')$.

پس $B - A' = B \cap A$

*یادداشت. تمامی حل این مساله را می‌توان با نمادهای ریاضی و به‌این‌صورت نوشت:

$$B - A' = \{x | x \in B \text{ و } x \notin A'\} =$$
$$= \{x | x \in B \text{،} x \in A\} = B \cap A$$

و به‌همین ترتیب، برای عکس آن.

مثال ۱۴. اگر $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ مجموعهٔ مرجع و

$$A = \{a, b, c, d, e\}; \quad B = \{a, c, e, g\};$$
$$C = \{b, e, f, g\}$$

مجموعه‌های $C - B$، $A' - B$، $(A - C)'$ و $(A - B')'$ را پیدا کنید.

پاسخ.

$$C - B = \{b, f\}; \quad A' - B = \{f\}; \quad (A - C)' =$$
$$= C = \{b, e, f, g\}; \quad (A - B')' = \{b, d, f, g\}$$

□

بامفهوم مجموعه، ویژگی‌های آن و عمل کردن با آن آشنا شدیم. بهتر است فهرستی از این ویژگی‌ها را بیاوریم تا هم مروری بر درس‌های گذشته

باشد وهم، درصورت تردید، بتوان به آن‌ها مراجعه کرد. حافظه، همه‌چیز را به‌سادگی درذهن نگه نمی‌دارد، به‌همین‌دلیل است که واژه‌نامه‌های مختلف را درست کرده‌اند. این هم واژه‌نامه‌ای است از ویژگی‌های مجموعه‌ها: دراین «واژه‌نامه»، A، B و C مجموعه‌هایی دلخواه، M مجموعهٔ مرجع آن‌ها و ϕ مجموعهٔ تهی است. نشانهٔ $'$ به‌معنای متمم مجموعه است: A'، یعنی متمم مجموعهٔ A نسبت به مرجع M.

۱) $A \subset A$.

۲) اگر $A \subset B$ و $B \subset A$، آن‌وقت $A = B$.

۳) اگر $A \subset B$ و $B \subset C$، آن‌وقت $A \subset C$.

۴) $\phi \subset A$.

۵) $A \subset M$.

۶) $A \cup B = B \cup A$.

۷) $A \cap B = B \cap A$.

۸) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

۹) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

۱۰) $A \cup A = A$.

۱۱) $A \cap A = A$

۱۲) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

۱۳) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

۱۴) $A \cup \phi = A$.

۱۵) $A \cap M = A$.

۱۶) $A \cup M = M$.

۱۷) $A \cap \phi = \phi$.

۱۸) اگر $A \subset B$، آن‌وقت $A \cup B = B$ و برعکس.

۱۹) اگر $A \subset B$، آن‌وقت $A \cap B = A$ و برعکس.

۲۰) $A \cup A' = M$.

۲۱) $A \cap A' = \phi$

۲۲) $\phi' = M$ و $M' = \phi$.

۲۳) $(A')' = A$.

۲۴) اگر $A \subset B$، آن‌وقت $B' \subset A'$.

۲۵) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

۲۶) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

***یادداشت.** بسیاری از این رابطه‌ها را می‌توان از دیگران نتیجه گرفت. به‌ویژه می‌توان با تبدیل نماد $\subset$ به نماد $\supset$، نماد ϕ به‌نماد M ونماد $\cup$ به نماد $\cap$ و برعکس از یک رابطه، رابطهٔ دیگری را به‌دست آورد. مثلاً، ازاین‌راه، رابطهٔ ۵، نتیجه‌ای از رابطهٔ ۴، رابطهٔ ۷، نتیجه‌ای از رابطهٔ ۶، رابطهٔ ۱۳ نتیجه‌ای از رابطهٔ ۱۲، رابطهٔ ۱۷ نتیجه‌ای از رابطهٔ ۱۶ و غیره است:

به‌این‌ترتیب اگرتنها ۶ رابطه از a تا f را که در زیر نوشته‌ایم، بدانیم، می‌توان بقیه را از آن‌ها نتیجه گرفت:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A$

d) $A \cap B = (A' \cup B')'$

e) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

f) $M' = \phi, M = A \cup A'$.

تمرین‌ها

۴۰. مجموعهٔ M دانش‌آموزان یک کلاس، شامل دو مجموعهٔ جداازهم است: A، مجموعهٔ دانش‌آموزانی که با بازی شطرنج آشنا هستند و B، مجموعهٔ دانش‌آموزانی که با بازی شطرنج آشنا نیستند. از این رابطه‌ها، کدام

درست و کدام نادرست است:

$$۱)M = A \Leftrightarrow B = \phi; \quad ۲)M - A = B;$$
$$۳)A \cup B = M; A \cap B = \phi$$

۴۱. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم: $A \cup B = A$ و $B \cup A = B$، آن‌وقت $A = B$.

۴۲. اگر داشته‌باشیم:

$$Q = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}; \quad R = \{۲, ۴, ۶, ۸\};$$
$$S = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۷\}; \quad T = \{۲, ۶, ۸\}$$

مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

$$۱)(Q \cap R) \cup (S \cap T); \quad ۲)Q \cap R \cap S \cap T;$$
$$۳)(Q \cup R) \cap (S \cup T); \quad ۴)(R \cup T) \cap S;$$
$$۵)R \cup (T \cap S)$$

۴۳. این دوگزاره را ثابت کنید:

۱) اگر $E \cup F = E$ و $E \cap F = E$ آن‌وقت $E = F$؛

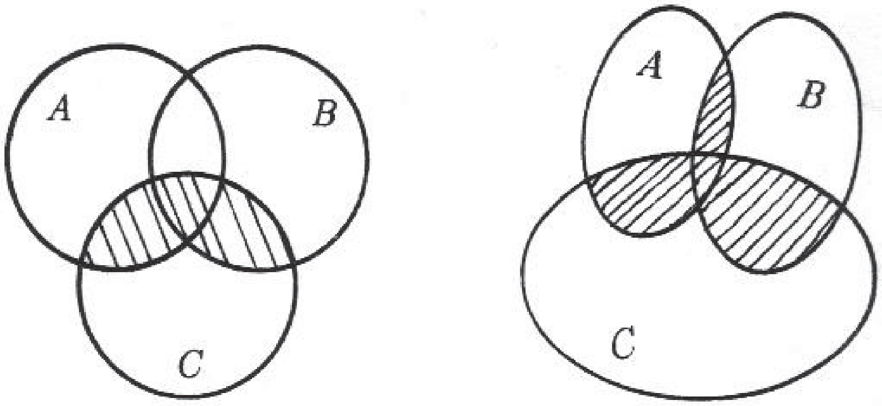
۲) اگر $F \subset E$ و $E \cap F = E$، آن‌وقت $F = E$؛ درضمن عکس این دوگزاره هم درست است.

۴۴. این رابطه به‌چه معناست.

$$A \cup B = B \cap C$$

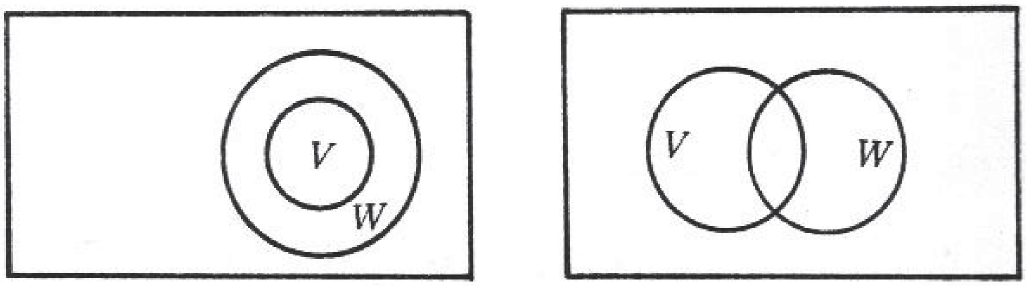
۴۵. به‌یاری نمودار وِن، درستی این قاعدهٔ بخشی را ثابت کنید:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



ب الف

شکل ۱۸



ب الف

شکل ۱۹

۴۶. درشکل ۱۸، A و B و C، هرکدام معرف یک مجموعه‌اند. بخش هاشورخورده، چه عمل‌هایی را معرفی می‌کند.

۴۷. می‌دانیم $A \cap B = \phi$. ثابت کنید $A \subset B'$.

۴۸. در هرکدام از نمودارهای الف و ب (شکل ۱۹)، این مجموعه‌ها را هاشور بزنید: W'، $V \cap W$، $V' \cup W$، $W - V$، $V' - W'$، $V \cap W'$.

۴۹. به‌جای ؟، یکی از نمادهای $\subset$ یا $\supset$ را بگذارید:

الف) $A?(A \cap B)$؛ ب) $A?(A - B)$؛

پ) $A'?(B - A)$؛ ت) $A?(A \cup B)$.

*۵۰. برابری $A - B = A \cap B'$، تفاضل دو مجموعه را به‌کمک «اشتراک» و «متمم» توضیح می‌دهد. دستوری پیدا کنید که اجتماع $A \cup B$ را به‌کمک «اشتراک» و «متمم» توضیح دهد.

*۵۱. A، B و C، مجموعه‌هایی از مرجع M هستند. این دو عبارت را ساده کنید:

$$X = A \cup (A' \cap B);$$
$$Y = (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap C') \cup B$$

*۵۲. بافرض $A \subset M$، $B \subset M$ و $C \subset M$ این دوعبارت را ساده کنید:

$$۱) Z = [C \cap (A' \cup B') \cap (A \cup C')] \cup (A' \cap B \cap$$
$$\cap C) \cup (A \cap B \cap C')$$
$$۲) T = (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap$$
$$\cap C) \cup (A \cap B' \cap C)$$

*۵۳. این دو برابری را ثابت کنید:

$$۱) (A \cup B)' = A' \cap B'; \quad ۲) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

*۵۴. بافرض $A \subset M$، $B \subset M$ و $C \subset M$، ثابت کنید:

$$(A \cap B \cap C) \cup [A \cap (B' \cup C')] \cap A' = M$$

۵۵. در شهری از آذربایجان، هرکس یا به زبان آذری صحبت می‌کند، یا به‌زبان فارسی و یا به هردو زبان. ۹۰درصد ساکنان به زبان آذری و ۷۰درصد آن‌هابه زبان فارسی حرف می‌زنند. چنددرصد ساکنان این شهر به هردو زبان آذری و فارسی صحبت می‌کنند؟

۵۶. هر مستطیل را به‌عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع برمحیط و درون آن می‌گیریم. اگر همهٔ مستطیل‌های محاط در دایرهٔ (O, R) را درنظر بگیریم، اشتراک آن‌ها چه شکلی را تشکیل می‌دهد؟ اجتماع آنها چطور؟

یادداشت. دایرهٔ (O,R) یعنی دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ O و باشعاع برابر R. درضمن مستطیل، وقتی در یک دایره محاط است که چهار رأس آن، روی محیط دایره باشد.

***۵۷.** هر مثلث را به‌عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع در درون یا روی محیط آن فرض می‌کنیم. اشتراک همهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ (O,R)، چه‌شکلی را می‌سازد؟ اجتماع آن‌ها چطور؟

***۵۸.** این مجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم (منظور از $\mathbf{N}$، مجموعهٔ عددهای طبیعی است):

$$A=\{x|x\in \mathbf{N}, x\leq ۸\};$$

$$B=\{x|x\in N, x\geq ۴\};$$

$$C=\{x|x\in \mathbf{N}, x> ۳\};$$

$$D=\{x|x\in \mathbf{N}, ۴< x< ۵\}$$

مطلوب است $A\cap B$، $A\cup B$، $A\cap D$، $C\cup D$، $B-C$، $A-B$ و $C-A$.

۵۹. می‌دانیم:

$$A=\{r,s,t,u,v,w\};$$

$$B=\{u,v,w,x,y,z\};$$

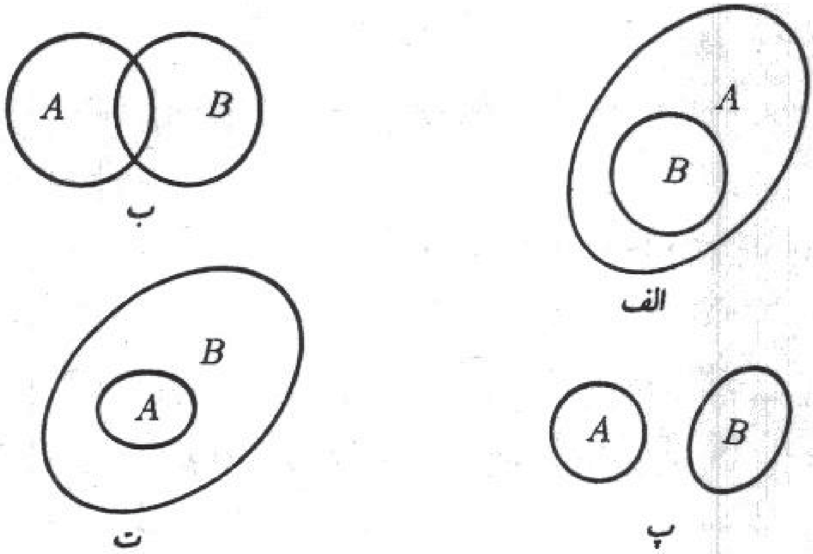
$$C=\{s,u,y,z\};\quad D=\{u,v\};$$

$$E=\{s,u\};\quad F=\{s\}$$

کدام‌یک از این مجموعه‌ها می‌تواند برابر مجموعهٔ X باشد، به‌شرطی‌که:

الف) $X\subset A$ و $X\subset B$؛ ب) $X\not\subset B$ و $X\subset C$؛

پ) $X\not\subset A$ و $X\not\subset C$؛ ت) $X\subset B$ و $X\not\subset C$.



شکل ۲۰

۶۰. می‌دانیم $A \subset B$ و $B \subset C$. درضمن $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$، $d \notin A$، $e \notin B$ و $f \notin C$،

کدام‌یک از این گزاره‌ها درست و کدام نادرست است:

الف) $a \in C$؛ ب) $b \in A$؛ پ) $c \notin A$؛ ت) $d \in B$؛ ث) $e \notin A$؛ ج) $f \notin A$.

۶۱. در شکل ۲۰، چند نمودار وِن داده شده‌است. کدام نمودار مربوط به کدام گزاره است: ۱)

۱) $A \subset B$؛ ۲) $A \supset B$؛ ۳) $A \cap B = \phi$؛ ۴) $A \cap B \neq \phi$

*۶۲. سه مجموعهٔ A و B و C داده شده‌اند و می‌دانیم:

$$(A \cup B) \subset (A \cup C) \text{ و } (A \cap B) \subset (A \cap C)$$

چه رابطه‌ای بین دو مجموعهٔ B و C وجود دارد؟

۳. عددهای درست

§۱ نگاهی به‌تاریخ

در یکی از نوشته‌های مانده از یونان باستان، به‌نام «پرومته در زنجیر» با زبان «پرومته»، اسطورهٔ افسانه‌ای، می‌خوانیم:

از رنج‌های انسان‌ها بشنوید، که درآغاز گروهی درمانده بودند.
به‌آنان آموختم که بیندیشند و خرد خود را به‌کار گیرند . . .
و سپس، راه به‌کار بردن عددها را،
که سرآمد دانستنی‌هاست . . . به آن‌ها شناساندم.

تاهمین آخرها بسیاری گمان می‌کردند، «عدد» را فیلسوفی، نابغه‌ای یا دانشمندی اختراع کرد و به آدمیان یاد داد چگونه بشمارند و چگونه «حساب» اسب‌ها یا فرزندان خود را نگه دارند. بیشتر نویسندگان، «اختراع» عدد را به فیثاغورث، فیلسوف و ریاضی‌دان دوران کهن یونان نسبت می‌دادند. حتی در سال‌های پایانی سدهٔ نوزدهم، *لئوپولد کرونه‌کر* (Kronecker)، ریاضی‌دان بااستعداد آلمانی (۱۸۲۳_۱۸۹۱میلادی) معتقد بود: «عددهای درست را پروردگار بزرگ آفرید، ولی عددهای دیگر، ساختهٔ دست بشر است».

حقیقت چیست؟ عددهای طبیعی

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۰, ۱۱, \ldots, ۱۰۰, ۱۰۱, \ldots$$

ازکجا و چگونه پدید آمدند؟

بخشی از یادداشت‌های یک جهان‌گرد پژوهشگر به‌نام پیکلوخو_ماکلای، دربارهٔ بومیان «گینهٔنو»، تاحدی می‌تواند موضوع را روشن کند. بومیان، از او می‌پرسند، کشتی چه‌موقع به این جزیره می‌آید؟ و ماکلای می‌نویسد:

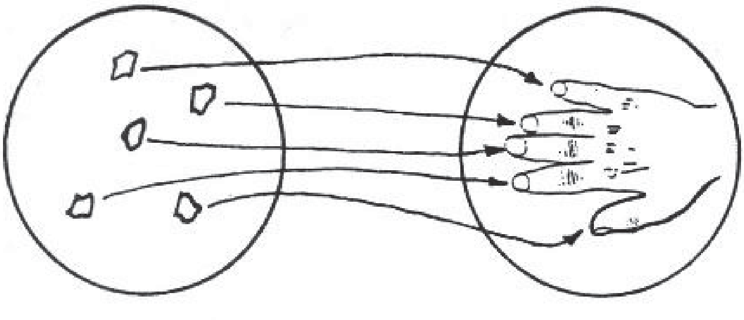
«. . . فکر کردم، وقت آن است ببینم بومی‌ها چگونه می‌شمارند. چندتکه کاغذ برداشتم، آن‌ها را از سمت پهنا بریدم و به تکه‌های کوچکتری بخش کردم

... مشتی از آن‌ها را به‌یکی از بومی‌ها دادم و گفتم هر تکه کاغذ نشانهٔ ۲ روز است. همه دور بومی جمع شدند. او به‌یاری انگشتان خود، آغاز به شمردن کرد. ولی اندکی پریشان بود ... دیگران تکه کاغذها را از او گرفتند و به دیگری دادند. او کاغذهای بریده را گرفت و، باغرور خاصی، جایی نشست و یک نفر را هم به‌یاری خواست و، سپس، آغاز به شمردن کرد. اولی تکه‌های کاغذ را روی زانویش می‌چید و برای هرکدام با صدای بلند و به زبان خود می‌گفت «یک». دوّمی واژهٔ «یک» را تکرار می‌کرد و، همراه با آن، یکی از انگشتان دست خود را می‌بست. اول انگشتان یک دست و بعد انگشتان دست دیگر خود را. وقتی به ۱۰ رسید و همهٔ انگشتان دو دست او بسته شد، هردو دست خود را تا زانو پایین آورد و باصدای بلند، به‌زبان بومی‌ها، گفت «دو دست». درهمین زمان، نفر سوم یکی از انگشتان خود را خم کرد، سپس، برای ۱۰ تکه کاغذ دوم، یک انگشت دیگر و برای ۱۰ تکه کاغذ بعدی، انگشت سوم خود را بست. تعداد بقیهٔ کاغذها به ۱۰ نمی‌رسید و آن‌ها را به‌کناری گذاشتند. به‌نظر می‌رسید، کار شمردن تمام شده‌است. ولی من آرامش آن‌ها را به‌هم زدم. ...»

نیازی به ادامهٔ نوشتهٔ این پژوهشگر نیست. تا همین‌جا، می‌توان به دو نتیجهٔ اساسی رسید:

۱) انسان، درطول تاریخ خود، به‌تدریج و به‌کندی، شمردن را یاد گرفت و هرچه نیازهای زندگی پیچیده‌تر می‌شد، مرز «شمارش» بالاتر می‌رفت و توانایی شمردن تعداد بیشتری از چیزها را پیدا می‌کرد. درضمن، در مرحله‌های نخستین، از اندام‌های بدن خود، و بیش‌ازهمه، از انگشتان دودست خود، برای شمردن استفاده می‌کرد. «دست» به‌معنای ۵ و «دست‌ها» به‌معنای ۱۰ بود. هنوز در زبان فارسی، برای ۵ انگشت دست از واژهٔ «پنجه» استفاده می‌کنیم.

این‌که انسان، به‌طور معمول، ۱۰ انگشت در دو دست خود دارد، موجب شد تا به‌تدریج همین عدد ۱۰، مبنایی برای «شمردن» شود. در نوشتهٔ بالا



شکل ۲۱ : مقایسهٔ تعداد تکه‌های کاغذ با انگشتان دست

دیدیم، وقتی بومیان، ضمن شمردن به ۱۰ می‌رسیدند، نفر دیگری، یک انگشت خود را به‌نشانهٔ ۱۰، می‌بست و، همین روش شمردن، به‌تدریج و درطول زمان «عدد شماری دهدهی» را به‌وجود آورد. شاید، اگر انسان درهر دست خود، ۶ انگشت داشت، عدد شماری امروز، به‌جای «دهدهی»، «دوازده‌دوازدهی» می‌بود.

خیلی از قوم‌ها، برای عددشماری، از مبنای ۵ (تعداد انگشتان یک دست) یا از مبنای ۲۰ (تعداد انگشتان دست‌ها و پاها) استفاده می‌کردند، ولی درطول زمان، عددشماری دهدهی همگانی شد.

۲) اما نتیجهٔ جالب‌تری که می‌توان گرفت، این است که برای شمارش، از مقایسهٔ دو مجموعه، استفاده می‌کردند: مجموعهٔ تکه‌های کاغذ و مجموعهٔ انگشتان دست.

این مقایسه چگونه انجام می‌شد؟ انگشت دست، بایک تکه کاغذ فرق دارد. باوجوداین، با کنار گذاشتن هر تکهٔ کاغذ، یک انگشت خود را می‌بستند، شمردن درمقایسه عضوهای دومجموعه به‌وجود آمد و شکل گرفت.

این مقایسه را، در ریاضیات، **تناظر یک‌به‌یک** می‌گویند. در شکل ۲۱، هر تکهٔ کاغذ متناظر با یک انگشت دست و هر انگشت دست متناظر بایک تکه کاغذ است. پس، تعداد تکه‌های کاغذ، با تعداد انگشتان یک دست برابر است.

هر مجموعه‌ای که بتوان عضوهای آن را با انگشتان یک دست، در تناظر یک‌به‌یک قرار داد، نمایندهٔ عدد ۵ است. و ۵، یک عدد طبیعی است.

به‌طور کلی، اگر تعداد عضوهای دو مجموعه یکی باشد، دو مجموعه را هم‌عدد یا هم‌ارز و‌یا، دربعضی موردها، هم‌توان می‌گویند.

عضوهای دو مجموعهٔ هم‌ارز را همیشه می‌توان در تناظر یک‌به‌یک قرار داد. درضمن، مجموعه‌های هم‌ارز، معرف یک عدد طبیعی هستند. درواقع، هر عدد طبیعی را می‌توان ویژگی مشترک همهٔ مجموعه‌های هم‌ارزی دانست که تعداد عضوهای هریک از آن‌ها برابر با آن عدد طبیعی باشد.

عددهای طبیعی از ۱ آغاز می‌شوند و، به‌ترتیب، هر عدد یک واحد از عدد قبلی خود بزرگتر است. به‌این‌ترتیب، عددهای طبیعی پایانی ندارند. و نمی‌توان عددی را نام برد که بزرگترین عدد طبیعی باشد. عددهای طبیعی، یک دنباله تشکیل می‌دهند. این دنباله، آغاز دارد، ولی پایانی ندارد.

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۰۰۰, ۱۰۰۱, \ldots$$

□

درمیان انسان‌های نخستین، بی‌پایانی عددهای طبیعی، معنایی نداشت. آن‌ها، بسته به نیاز خود، تاجایی می‌شمردند و، از آن‌به‌بعد را، با واژهٔ «خیلی» بیان می‌کردند. هنوز در ضرب‌المثل‌ها و واژه‌ها، می‌توان نشانه‌هایی از این‌گونه را پیدا کرد. وقتی می‌گویند «هفت بار گزکن، یک‌بار پاره‌کن»،[۱] به‌این معنا نیست که برای پاره‌کردن پارچه، باید درست هفت بار اندازه گرفت، نه کمتر و نه بیشتر، بلکه منظور این است که «به‌اندازهٔ کافی» دقت کن. وقتی در قصه‌های کودکان، از شهری صحبت می‌شود که «هفت برج‌وبارو» دارد، یعنی این شهر

---

[۱] گز یا ذرع، واحد طول درایران، قبل از رسمی شدن دستگاه متری و برابر ۱۰۴ سانتی‌متر.

برج و باروهای زیادی دارد. برای بعضی عددهای دیگر هم، چنین نشانه‌هایی وجود دارد: «هزارپا»، یعنی جانوری که پاهای زیادی دارد؛ «چلچراغ»، یعنی وسیلهٔ روشنائی سقف سالن که چراغ‌های زیادی دارو و غیره.

درک بی‌پایان بودن دنبالهٔ عددهای طبیعی، خیلی آسان به‌دست نیامد. ارشمیدس، اقلیدس و اراتوستن، که به‌تقریب هم‌زمان بودند و در یونان پیش از میلاد می‌زیستند، به احتمال زیاد، نخستین کسانی بودند که دربارهٔ بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای طبیعی بحث کردند. البته، ریاضی‌دانان هندی، از دوره‌های باستانی، با عددهای بزرگ کار می‌کردند و دربارهٔ عددهای بزرگ چیستان، می‌ساختند، ولی مفهوم بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای طبیعی را در کارهای خود وارد نکردند.

ارشمیدس، برای این‌که نشان دهد «بزرگترین عدد طبیعی» وجود ندارد، کتاب «دانه‌های شن» را نوشت؛ اقلیدس، بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای اول را ثابت کرد و اراتوستن، راهی برای به‌دست آوردن عددهای اول ارائه کرد.

§۲. مجموعه عددهای طبیعی

۱. ساده‌ترین و شناخته‌ترین عددها، عددهای درستِ مثبت‌اند که به آن‌ها، عددهای طبیعی گویند. عددهای طبیعی از ۱ آغاز می‌شوند و پایانی ندارند و، بنابراین، مجموعه‌ای بی‌پایان را تشکیل می‌دهند. مجموعهٔ عددهای طبیعی را با نماد N نشان می‌دهند:

$$\mathrm{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$$

وقتی می‌نویسیم: $a \in \mathrm{N}$، یعنی a عضوی از مجموعهٔ عددهای طبیعی است؛ به‌زبان دیگر: a، یک عدد طبیعی است. عددهای طبیعی، بیش از هر عدد دیگری کاربرد دارند و، بنابراین، آشنایی با ویژگی‌های آن‌ها و شناخت

قانون‌های عمل با آن‌ها، اهمیت جدی دارد. وقتی مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی را، با آغاز از عدد ۱ به‌ردیف صعودی (یعنی از کم به زیاد) بنویسیم، به آن دنبالهٔ عددهای طبیعی گویند.

هر عدد طبیعی n، بعد از عدد طبیعی دیگری آمده‌است که برابر $n - ۱$ است، به‌جز عدد ۱ که قبل از آن، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

همچنین، برای هر عدد طبیعی n، عدد دیگری وجود دارد که بلافاصله بعد از n قرار دارد: $n + ۱$.[۱]

عددهای $n - ۱$، n و $n + ۱$ را سه عدد متوالی (یا سه عدد پشت‌سرهم) گویند.

بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای طبیعی، از همین‌جا ناشی می‌شود، زیرا عدد طبیعی n را، هرقدر بزرگ درنظر بگیریم، عدد طبیعی $n + ۱$، که بزرگتر از آن است، وجود دارد.

۲. عمل با عددهای طبیعی. در مجموعهٔ عددهای طبیعی، عمل‌های جمع و ضرب، معین و قابل‌درک است، زیرا مجموع یا حاصل‌ضرب هردو عدد طبیعی، خود، یک عدد طبیعی است. همچنین عمل توان (به‌شرطی‌که نما، عددی طبیعی باشد)، ممکن است، یعنی توان دست یک عدد طبیعی، باز هم عددی طبیعی است.

می‌گویند: *مجموعهٔ عددهای طبیعی، نسبت‌به عمل‌های جمع، ضرب و توان، مجموعه‌ای بسته است* و این، به‌معنای آن است که، نتیجهٔ عمل، عددی است که عضو مجموعهٔ عددهای طبیعی است.

مجموعهٔ عددهای طبیعی، نسبت به تفریق و تقسیم، بسته نیست، یعنی نتیجه کم کردن یک عدد طبیعی از عدد طبیعی دیگر، ممکن است عددی طبیعی نباشد؛ همچنین، نتیجه تقسیم عددی طبیعی بر عدد طبیعی دیگر،

---

۱. گاهی به‌اشتباه «رشتهٔ عددهای طبیعی» می‌گویند، ولی در یک رشته، باید جمله‌ها با علامت + یا − به‌هم مربوط باشند، درحالی‌که در دنباله، چنین علامت‌هایی وجود ندارد.

می‌تواند عددی طبیعی نباشد.

مثال. نتیجه تفریق ۷ − ۱۳ برابر ۶ می‌شود که خود عددی طبیعی است، ولی نتیجهٔ تفریق ۱۳ − ۷، عددی طبیعی نیست.

همچنین، نتیجهٔ تقسیم ۳ : ۱۲ برابر ۴ می‌شود که عددی طبیعی است، ولی نتیجهٔ تقسیم ۱۲ : ۴ عددی طبیعی نیست.

مجموعهٔ عددهای طبیعی، نسبت به عمل ریشه گرفتن هم، مجموعه‌ای بسته نیست: ریشهٔ دوم ۹، عددی طبیعی و برابر است با ۳، ولی ریشهٔ دوم ۵، عددی طبیعی نیست.

۳. ردیف عمل‌ها. وقتی با عمل‌های متوالی متعددی سروکار داشته‌باشیم، باید به چند نکته توجه کنیم:

۱) عمل‌های داخل پرانتز، مقدم بر عمل‌های بیرون از آن است. فرض کنید، بخواهیم نتیجهٔ این عمل‌ها را به‌دست آوریم:

$$۳ \times (۱۸۲ - ۷)$$

دراین‌جا، اول باید مقدار داخل پرانتز را پیدا کرد:

$$۱۸۲ - ۷ = ۱۷۵$$

و بعد، بقیهٔ عمل‌ها را انجام داد (یعنی در ۳ ضرب کرد).

$$۳ \times (۱۸۲ - ۷) = ۳ \times ۱۷۵ = ۵۲۵$$

۲) در ردیف عمل‌هایی که شامل پرانتز نباشند، عمل‌های ضرب و تقسیم، بر عمل‌های جمع و تفریق مقدم‌اند. بین دو عمل ضرب و تقسیم یا دو عمل جمع و تفریق، درصورت نبودن پرانتز، باید عمل‌ها را به‌همان ردیفی که نوشته شده‌است، انجام داد.

چند مثال

$$۱۲ + ۲ \times ۸ : ۴ = ۱۲ + ۱۶ : ۴ = ۱۲ + ۴ = ۱۶;$$

$$۱۲۵ - ۷ \times ۴ + ۱۱۱ : ۳۷ =$$

$$= ۱۲۵ - ۲۸ + ۳ = ۹۷ + ۳ = ۱۰۰$$

۴. بخش‌پذیری در مجموعهٔ عددهای طبیعی. می‌گویند عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش‌پذیر است، وقتی عددی طبیعی مثل c وجود داشته‌باشد، به‌نحوی‌که داشته‌باشیم:

$$a = b \times c$$

در تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر، ممکن است خارج‌قسمت، عددی طبیعی نباشد، دراین‌صورت می‌گویند، عدد اول بر عدد دوم بخش‌پذیر نیست؛ یا دقیق‌تر، در تقسیم عدد اول بر عدد دوم، اگر بخواهیم، خارج‌قسمت، عدد درستی باشد، عمل تقسیم همراه با باقی‌مانده است. مثلاً در تقسیم عدد ۲۷ برعدد ۵، خارج قسمت برابر ۵ و باقی‌مانده برابر ۲ می‌شود؛ یا می‌توان گفت، خارج قسمت برابر عدد $۵\frac{۲}{۵}$ است، که عدد درستی نیست.

بنابراین، در برابر یک پرسش قرار می‌گیریم: چگونه می‌توان، ازقبل، فهمید که یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر بخش‌پذیر است یانه؟ برای ساده‌ترین عددها می‌توان پاسخ این پرسش را پیدا کرد.

پیش از آن‌که به معیارهای بخش‌پذیری بپردازیم، به دو نکته اشاره می‌کنیم.

نکتهٔ اول این‌که، اگر دو عدد بر عدد سوم بخش‌پذیر باشند، مجموع یا تفاضل آن‌ها، بر عدد سوم بخش‌پذیر خواهدبود، عددهای ۴۲۰ و ۳۵۰، هردو بر ۷ بخش‌پذیرند:

$$۴۲۰ : ۷ = ۶۰; \quad ۳۵۰ : ۷ = ۵۰$$

درنتیجه، مجموع و تفاضل آن‌ها، یعنی

$$۴۲۰ + ۳۵۰ = ۷۷۰; \quad ۴۲۰ - ۳۵۰ = ۷۰$$

نیز بر ۷ بخش‌پذیرند:

$$۷۷۰ : ۷ = ۱۱۰; \quad ۷۰ : ۷ = ۱۰$$

همچنین، اگر عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد، چندبرابر عدد a هم، بر b بخش‌پذیر است. عدد ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$۱۵ : ۵ = ۳$$

پس ۱۱ برابر عدد ۱۵ یعنی ۱۶۵ هم بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$۱۶۵ : ۵ = ۳۳$$

نکته دوم مربوط به باز کردن یک عدد می‌شود. وقتی شما می‌نویسید ۷۷۷، تنها از رقم ۷ استفاده کرده‌اید. رقم ۷ را سه‌بار به‌کار برده‌اید، ولی معنای این سه‌رقم باهم فرق دارد: رقم ۷ سمت راست، یعنی ۷؛ رقم دوم از سمت راست، یعنی ۷۰ و رقم سوم یعنی ۷۰۰، پس ۷۷۷ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۷۰۰ + ۷۰ + ۷$$

این را، بازشدهٔ عدد ۷۷۷ گویند.

اگر رقم‌های یک عددِ مثلاً سه‌رقمی را، از چپ به راست با حرف‌های a و b و c نشان دهیم، با نوشتن آن به‌صورت abc ممکن است اشتباه کنیم و خیال کنیم، منظور پیدا کردن حاصل‌ضرب سه عدد a و b و c در یکدیگر است. به‌همین مناسبت، آن را به‌صورت $\overline{abc}$ می‌نویسند: $\overline{abc}$ یعنی عدد

سه‌رقمی که یکان آن برابر c، ده‌گان آن برابر b و صدگان آن برابر a است و بازشدهٔ آن چنین می‌شود:

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

اکنون معیارهای بخش‌پذیری بر برخی عددها را می‌آوریم.

۱) عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن یا بر ۲ بخش‌پذیر ویا برابر صفر باشد. عددهای ۳۰، ۵۲، ۷۴، ۱۹۶، و ۴۷۵۸ همه بر ۲ بخش‌پذیرند.

یادداشت ۱. صفر بر هر عددی بخش‌پذیر و خارج‌قسمت برابر صفر است:

$$۰ : ۱۸۱ = ۰; \quad ۰ : ۲۵ = ۰$$

بنابراین، برای بخش‌پذیر بودن یک عدد بر ۲، می‌توان گفت: *عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن بر ۲ بخش‌پذیر باشد.*

یادداشت ۲. عددهای بخش‌پذیر بر ۲ را، **عددهای زوج** و عددهای بخش‌ناپذیر بر ۲ را، **عددهای فرد** می‌نامند.

عددهای زوج مثبت، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای طبیعی هستند، همچنین، عددهای فرد مثبت هم، زیرمجموعهٔ دیگری از عددهای طبیعی هستند.

یادداشت ۳. اگر عدد صفر را به مجموعهٔ عددهای طبیعی اضافی کنیم، **مجموعهٔ عددهای حسابی**، به‌دست می‌آید که آن را با $\mathbf{W}$ نشان می‌دهند:

$$\mathbf{W} = \mathbf{N} \cup \{۰\} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$$

۲) عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

برای عدد ۳۴۷۵۲ داریم:

$$۳ + ۴ + ۷ + ۵ + ۲ = ۲۱$$

۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر است (زیرا مجموع رقم‌های آن، یعنی ۱ + ۲ بر ۳ بخش‌پذیر است)، پس عدد ۳۴۷۵۲ بر ۳ بخش‌پذیر است. ولی این عدد بر ۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا مجموع رقم‌های آن (یعنی ۲۱) بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۳) عددی بر ۴ یا ۲۵ بخش‌پذیر است که عدد دورقمی سمت راست آن، بر ۴ یا ۲۵ بخش‌پذیر باشد.

عد ۹۷۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است، زیرا ۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است؛ این عدد بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۳۶ بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.

عدد ۴۲۸۳۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است زیرا ۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است؛ ولی همین عدد بر ۴ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۷۵ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

۴) عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که به ۵ یا ۰ ختم شده‌باشد. عددهای ۱۹۵ و ۲۱۰ بر ۵ بخش‌پذیر و عدد ۵۵۱ بر ۵ بخش‌ناپذیر است.

۵) عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۲۶ بر ۶ بخش‌پذیر است، زیرا هم زوج است و هم مجموع رقم‌های آن، یعنی ۹، بر ۳ بخش‌پذیر است.

۶) عددی بر ۸ یا ۱۲۵ بخش‌پذیر است که عدد سه‌رقمی سمت راست آن بر ۸ یا ۱۲۵ بخش‌پذیر باشد. عدد ۲۵۷۲۰ بر ۸ و عدد ۲۹۱۳۷۵ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است، زیرا ۷۲۰ بر ۸ و ۳۷۵ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است

۷) عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که به صفر ختم شده‌باشد. عددهای ۱۱۰ و ۳۲۰۰ بر ۱۰ بخش‌پذیرند، زیرا رقم سمت راست آن‌ها برابر صفر است.

۸) عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که تفاوت مجموع رقم‌های ردیف فرد

(با آغاز از سمت راست) و مجموع رقم‌های ردیف زوج (بازهم با آغاز از سمت راست)، برابر صفر یا بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً عدد ۷۵۹۴۴ را درنظر می‌گیریم. اگر از سمت راست عدد آغاز کنیم، رقم‌های ۴، ۹ و ۷ در ردیف فرد و رقم‌های ۴ و ۵ در ردیف زوج واقع‌اند و و داریم

$$\text{مجموع رقم‌های ردیف فرد} = ۴ + ۹ + ۷ = ۲۰;$$

$$\text{مجموع رقم‌های ردیف زوج} = ۴ + ۵ = ۹$$

تفاوت این دو مجموع، یعنی ۹ − ۲۰، برابر ۱۱ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس عدد ۷۵۹۴۴ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$۷۵۹۴۴ : ۱۱ = ۶۹۰۴$$

۹) عددی بر ۱۲ بخش‌پذیر است که هم بر ۳ وهم بر ۴ بخش‌پذیر باشد. عدد ۷۱۱۵۲۸ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، زیرا مجموع رقم‌های آن

$$۷ + ۱ + ۱ + ۵ + ۲ + ۸ = ۲۴$$

و درنتیجه، خود عدد بر ۳ بخش‌پذیر است. ازطرف‌دیگر، چون عدد دورقمی سمت راست، یعنی ۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است، پس خود عدد هم بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود:

$$۷۱۱۵۲۸ : ۱۲ = ۵۹۲۹۴$$

بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳

پیش از آن‌که به معیار بخش‌پذیری یک عدد بر ۷ یا ۱۳ بپردازیم، با چند مفهوم، آشنا شویم.

عددی را درنظر می‌گیریم، مثلاً

$$۳۵۸۵۶۰۸۱۸۰۱۸۲$$

این عدد را، از سمت راست، به گروه‌های سه‌رقمی تقسیم می‌کنیم

$$۳, ۵۸۵, ۶۰۸, ۱۸۰, ۱۸۲$$

و آنها را گروه عددهای سه‌رقمی می‌نامیم. درضمن، اگر از سمت راست درنظر بگیریم، عددهای سه‌رقمی ردیف فرد را گروه سه‌رقمی‌های فرد و عددهای ردیف زوج را، گروه سه‌رقمی‌های زوج می‌نامیم.

۱۰) عددی بر ۷ بخش‌پذیر است که، درآن، تفاوت مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد با مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج، بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً درمورد عدد ۱۳رقمی بالا مجموع سه‌رقمی‌های ریف فرد برابر است با

$$۱۸۲ + ۶۰۸ + ۳ = ۷۹۳$$

و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج

$$۱۸۰ + ۵۸۵ + ۷۶۵$$

اختلاف این دو عدد، یعنی

$$۷۹۳ - ۷۶۵ = ۲۸$$

بر ۷ بخش‌پذیر است، بنابراین خود عدد ۱۳ رقمی هم بر ۷ بخش‌پذیر است:

$$۳۵۸۵۶۰۸۱۸۰۱۸۲ : ۷ = ۵۱۲۲۲۹۷۴۰۰۲۶$$

۱۱) معیار بخش‌پذیری بر ۱۳، شبیه معیار بخش‌پذیر بر ۷ است: عددی بر ۱۳ بخش‌پذیر است که اختلاف بین مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج در آن، بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، برای عدد ۱۳۳۲۶۶۹۷۹۳، مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد، برابر

$$۷۹۳ + ۳۳۲ = ۱۱۲۵$$

و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج برابر

$$۶۶۹ + ۱ = ۶۷۰$$

و تفاضل آن‌ها برابر

$$۱۱۲۵ - ۶۷۰ = ۴۵۵$$

است که بر ۱۳ بخش‌پذیر است. پس عدد ۱۰رقمی ما بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

$$۱۳۳۲۶۶۹۷۹۳ : ۱۳ = ۱۰۲۵۱۳۰۶۱$$

یادداشت. وقتی عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد، a را مضرب b گویند. ۴۲ مضربی است از ۷ و ۹۱ مضربی است از ۱۳.

§۳. مجموعهٔ عددهای درست

برخی از ریاضی‌دانان سده‌های پیش در ایران (و همچنین در هند)، به مساله‌هایی برمی‌خورند که جواب آن‌ها، عددی کمتر از هیچ بود. آن‌ها، برای توضیح این‌گونه جواب‌ها، اصطلاح خاصی داشتند: عددهای بزرگتر از صفر را «موجودی» و عددهای کمتر از صفر را «قرض» می‌نامیدند، اصطلاح‌هایی که با واقعیت هم تطبیق می‌کند. به مثالی توجه کنیم.



شکل ۲۲ : *محور عددها*

پدری ۵۰ سال و پسرش ۲۰ سال دارد. بعد از چندسال، سن پدر سه‌برابر سن پسر می‌شود.

تفاوت سال‌های سن پدر و پسر برابر ۳۰ است. این تفاوت هرگز تغییر نمی‌کند، یعنی وقتی که سن پدر سه‌برابر سن پسر باشد، بازهم تفاوت سن آن‌ها، همین ۳۰ سال است. درآن‌زمان، پدر به‌اندازهٔ دوبرابر سن پسر بزرگتر است، یعنی (درآن زمان)، دو برابر سن پسر برابر ۳۰ است. پس پسر باید ۱۵ سال و، درنتیجه، پدر ۴۵ سال داشته‌باشد تا داشته باشیم:

$$۴۵ : ۱۵ = ۳$$

درصورت مساله‌گفته شده‌بود «**چند سال دیگر**، سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود». و حالا که جواب را به‌دست آورده‌ایم، باید پاسخ بدهیم: «**۵ سال پیش**، سن پدر، سه‌برابر سن پسر بوده‌است».

اگر امروز را، مرز زمان گذشته و زمان آینده بدانیم، در ریاضیات، سال‌های آینده را با علامت + و سال‌های گذشته را با علامت − مشخص می‌کنند. بنابراین، به پرسش مساله می‌توان این‌طور پاسخ داد:

«در ۵− سال دیگر، سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود».

«۵−» *سال دیگر*، یعنی *۵ سال پیش*.

عدد ۵− را **قرینهٔ** عدد ۵+ (که همان ۵ است) می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری این است که اگر روی یک خط راست افقی، نقطه‌ای را به‌عنوان مبداء و برای عدد ۰ انتخاب کنیم، می‌توانیم عددهای بزرگتر از صفر را (که عددهای مثبت نامیده می‌شوند) درسمت راست آن و عددهای کمتر از صفر

(یعنی عددهای منفی) را درسمت چپ آن نشان دهیم. دراین‌صورت، جای دو عدد ۵ و ۵ـ (و همچنین جای دو عدد ۲ و ۲ـ و غیره)، درست قرینهٔ یکدیگر، نسبت به نقطهٔ مبداء قرار می‌گیرند (شکل ۲۲).

اجتماع مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ قرینه‌های عددهای طبیعی، همراه با عدد ۰ را، **مجموعهٔ عددهای درست** *می‌نامند* ویا $\mathbf{Z}$ نشان می‌دهند:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$$

§۴. کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد

۱. دو عدد ۵ و ۶ را درنظر بگیرید. مجموعهٔ مضرب‌های هرکدام از این دوعدد، مجموعه‌ای بی‌پایان است.

$$A = \text{مجموعهٔ مضرب‌های ۵} = \{۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, \ldots\}$$

$$B = \text{مجموعهٔ مضرب‌های ۶} = \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ۳۶, \ldots\}$$

(تنها مضرب‌های مثبت را درنظر گرفته‌ایم و از ۰ هم، که مضرب هر عددی است، صرف‌نظر کرده‌ایم).

اگر عضوهای این دومجموعه‌را، به اندازهٔ کافی، بنویسیم، به عددهای زیادی برمی‌خوریم که در هر دومجموعه وجود دارند؛ به‌زبان دیگر، اشتراک این‌دو مجموعه، خودش یک مجموعهٔ بی‌پایان است:

$$A \cap B = \{۳۰, ۶۰, ۹۰, ۱۲۰, \ldots\}$$

عضوهای مجموعهٔ $A \cap B$ را، مضرب‌های مشترک دو عدد ۵ و ۶ گویند. کوچکترین این عـددها، یعنی ۳۰، **کوچکترین مضرب مشترک** دو عدد ۵ و ۶ است.

۲. اکنون دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ را درنظر می‌گیریم. هریک از این عددها، بر عددهای دیگری بخش‌پذیرند که آن‌ها را مقسوم‌علیه‌ها یا بخش‌یاب‌های آن‌ها گوییم:

$$E = \text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های } ۲۷۳ = \{۱, ۳, ۷, ۱۳, ۲۱, ۳۹, ۹۱, ۲۷۳\},$$

$$F = \text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های } ۳۵۷ = \{۱, ۳, ۷, ۱۷, ۲۱, ۵۱, ۱۱۹, ۳۵۷\}$$

بین مجموعه‌های E و F هم عضوهای مشترکی وجود دارد که آن‌ها را مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ گویند.

$$E \cap F = \{۱, ۳, ۷, ۲۱\}$$

مجموعهٔ $E \cap F$، مجموعه‌ای باپایان است که دربین عضوهای آن، بزرگترین عدد وجود دارد. دراین‌جا، بزرگترین عدد عضو مجموعهٔ $E \cap F$ برابر است با ۲۱ و ۲۱ را **بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک** دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ گویند.

دربارهٔ کوچکترین مضرب و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اندکی بعد، باز هم صحبت خواهیم کرد.

§۵. عدد اول

به عددی اول گوییم که تنها بر دو عدد بخش‌پذیر باشد: عدد ۱ و خودش.

عددهای ۱۳ و ۱۰۱، عددهایی اوّل‌اند، زیرا جز بر ۱ و خودشان، بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیستند.

مجموعهٔ عددهای اول، که زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای طبیعی است، مجموعه‌ای بی‌پایان است، اگر مجموعهٔ عددهای اول را با P نشان دهیم، چند عضو نخستین این مجموعه، چنین است.

$$P = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, \ldots\}$$

همهٔ عددهای اول، به‌جز ۲، عددهایی فردند.

عددهای غیر اول را، عددهای مرکب گویند. عدد ۱ را نه اول به‌حساب می‌آورند و نه مرکب

§۶. عددهایی که بخش‌یاب مشترکی جز واحد ندارند

دو عدد ۱۵۴ و ۱۹۵ را درنظر می‌گیریم. این‌ها، عددهایی مرکب‌اند:

$$\text{بخشیاب‌های } ۱۵۴ = \{۱, ۲, ۷, ۱۱, ۱۴, ۲۲, ۷۷, ۱۵۴\}$$

$$\text{بخشیاب‌های } ۱۹۵ = \{۱, ۳, ۵, ۱۳, ۱۵, ۳۹, ۶۵, ۱۹۵\}$$

ولی بین بخش‌یاب‌های آن‌ها، جز واحد، عدد مشترک دیگری وجود ندارد:

$$(\text{بخشیاب‌های } ۱۵۴) \cap (\text{بخشیاب‌های } ۱۹۵) = \{۱\}$$

از دو عدد ۱۵۴ و ۱۹۵ هیچ‌کدام اول نیستند، ولی ازآن‌جاکه، جز ۱، بخش‌یاب مشترک دیگری ندارد، آنها را **نسبت به‌هم اول** گویند.

دو عدد طبیعی وقتی *نسبت به‌هم اول‌اند* که، جز ۱، *بخش‌یاب مشترک دیگری نداشته‌باشند.* بزرگترین بخش‌یاب مشترک (یا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک) دو عددی که نسبت به‌هم اول‌اند، برابر است با واحد.

به دو عددی را که نسبت به هم اول‌اند، **عددهای متباین** هم می‌گویند.

تمرین‌ها

۶۳. کدام مجموعهٔ عددها، نسبت به سه عمل جمع، تفریق و ضرب، بسته است، یعنی نتیجهٔ عمل، بازهم عضوی از همان مجموعه است؟

۶۴. در مجموعهٔ عددهای طبیعی، در بیشتر عددها، عمل تقسیم، همراه با باقی‌مانده است. چه روشی برای آزمایش درستی عمل تقسیم می‌شناسید؟

۶۵. تفاضل دو عدد، برابر است با ۱۶. دو جملهٔ تفریق را چگونه تغییردهیم، تا تفاضل برابر صفر شود؟

۶۶. ۱) اگر یکی از جمله‌های ضرب را ۳برابر کنیم، حاصل‌ضرب چه تغییری می‌کند؟ ۲) اگر به‌یکی از جمله‌های ضرب سه واحد را اضافه کنیم، چطور؟ ۳) همچنین، اگر یکی از جمله‌های ضرب را نصف کنیم؟
۴) اگر از یکی از جمله‌های ضرب ۲ واحد کم کنیم؟

۶۷. ۱) اگر بخشی (مقسوم) را نصف کنیم، خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟ باقی‌مانده چطور؟ ۲) اگر از بخشی ۲ واحد کم کنیم، در خارج‌قسمت و باقی‌مانده چه تغییری حاصل می‌شود؟

۶۸. اگر مقسوم (بخشی) را سه‌برابر کنیم یا سه واحد به‌آن اضافه کنیم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده چه تغییری می‌کنند؟

۶۹. در تقسیم عددی بر ۵، خارج‌قسمت برابر ۲۰۴ شده‌است، ولی از باقی‌مانده اطلاعی نداریم. این عدد، چه عددهایی می‌تواند باشد؟

۷۰. نتیجهٔ این عمل‌ها را پیدا کنید:

۱) $۱۲۳ \times ۲۶ + ۱۲۹۲۴ : ۳۶ + ۳۴۲۴۸ : ۲۴;$

۲) $۲۹۹۳۲ : ۲۸ - ۸۴۳۲ : ۳۴ + ۶۱۷۹ - ۹۷ \times ۳۸;$

۳) $۵۸۹۵۶ : ۱۷ + ۲۹۱۵۴ : ۴۳ - ۲۵۶ \times ۱۴;$

۴) $[۲۱۳۴۴ : ۱۶ + (۱۵۴۰ - ۹۷۸) + ۳۲ \times ۷۴] : ۵۲;$

۵) $۸۵۴۲۵۰ : [۳۱۸ \times ۲۷۴ - (۵۹۳۴۷ + ۲۴۳۶۸)]$

۷۱. پنج زیرمجموعهٔ بی‌پایان، از مجموعهٔ عددهای طبیعی را بنویسید.

۷۲. این عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $(۳۷ \times ۱۱ - ۲۰۳۵ : ۵) \times ۹۶ + ۱۸;$

۲) $(۱۲۵۹۷۲ - ۴۰۹ \times ۳۰۸) : ۹۲;$

۳) $۸۳۴ \times (۱۴۵ \times ۲۰۳ - ۲۹۱۳۰ -$

$-۷۴۱۱۵ : ۲۴۳) + ۸۰۴ \times ۲۰۵$

۷۳. برای پیدا کردن حاصل‌ضرب یک عدد در ۵، چه‌راه ساده و سریعی پیشنهاد می‌کند؟ برای ضرب در هریک از عددهای ۲۵، ۹، ۹۹، ۱۵، ۱۱ یا ۱۰۱ چطور؟

برای تقسیم بر ۵ یا ۲۵ یا ۵۰ چه روش ساده‌ای پیشنهاد می‌کنید؟

*۷۴. آیا می‌توانید روش ساده‌ای برای ضرب یک عدد دورقمی که به ۵ ختم شده‌است، درخودش، پیدا کنید، مثل ۶۵ × ۶۵ یا ۹۵ × ۹۵؟

*۷۵. معیارهای بخش‌پذیری بر عددهای از ۲ تا ۱۵ را ثابت کنید.

۷۶. مجموعهٔ مضرب‌های هریک از سه عدد ۶، ۹ و ۱۵ را بنویسید. کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها کدام است؟

۷۷. مجموعه مقسوم‌علیه‌ها (بخش‌یاب‌ها) را برای هریک از عددهای ۳۶، ۶۰ و ۸۴ بنویسید. بزرگترین بخش‌یاب مشترک این عددها کدام است؟

۷۸. آیا برای دو عدد، بزرگترین مضرب مشترک یا کوچکترین بخش‌یاب مشترک وجود دارد؟

۷۹. عددی پیدا کنید که از حاصل‌ضرب آن در ۷، عددی شش‌رقمی به‌صورت $\overline{aaaaaa}$ به‌دست آید (یعنی همه رقم‌ها، دراین عدد شش‌رقمی باهم برابر باشند).

۸۰. عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a \neq c$.

۱) چرا تفاضل دو عدد $\overline{abc}$ و $\overline{cba}$ بر ۹ و بر ۱۱ بخش‌پذیر است؟

۲) چرا عدد شش‌رقمی $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است؟

*۸۱. همهٔ عددهای دورقمی را پیدا کنید که، اگر درهرکدام از آن‌ها، ۲ واحد به هر رقم اضافه کنیم، حاصل‌ضرب عددهایی که به‌دست می‌آید، برابر خود عدد دورقمی شود.

*۸۲. بزرگترین عدد n را پیدا کنید که، برای آن، عدد دورقمی $\overline{ab}$. برابر حاصل‌ضرب $(a+n)(b+n)$ باشد.دراین صورت، عدد دورقمی $\overline{ab}$ چقدر است؟

*۸۳. آیا عددی ۹رقمی پیدا می‌شود که، در آن، همهٔ رقم‌های از ۱ تا ۹، بدون تکرار، وجود داشته‌باشد و، درضمن، از ضرب آن در عدد ۸، عدد نه‌رقمی دیگری، با همان رقم‌ها، ولی با ردیفی دیگر، به‌دست آید؟

*۸۴. مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو زیرمجموعهٔ دلخواه، ولی جداازهم A و B تقسیم کرده‌ایم:

$$A \cup B = \mathbf{N} \text{ و } A \cap B = \phi$$

ثابت کند، دست‌کم در یکی از دو زیرمجموعهٔ A یا B، دوعضو وجود دارد، به‌نحوی که میانگین حسابی آن‌ها هم، متعلق به همان مجموعه است.

یادداشت. میانگین حسابی دو عدد، یعنی نصف مجموع آن‌ها. مثلاً میانگین حسابی دو عدد ۱۵ و ۲۵ برابر است با $\frac{۱۵ + ۲۵}{۲}$، یعنی ۲۰.

*۸۵. با رقم‌های از ۱ تا ۶، همهٔ عددهای شش‌رقمی ممکن را نوشته‌ایم، به‌نحوی‌که در هیچ‌کدام از آن‌ها، رقم تکراری وجود نداشته‌باشد. سپس، این عددها را، به‌ترتیب صعودی، یعنی از کم به زیاد نوشته و برای آن‌ها، شمارهٔ ردیف گذاشته‌ایم: عدد شمارهٔ ۱، عدد شمارهٔ ۲، عدد شمارهٔ ۳ و غیره. در این ردیف، عدد $A = ۴۳۵۲۱۶$ چه شماره‌ای دارد؟

۸۶. آیا می‌توان با رقم‌های از ۱ تا ۶، یک عدد شش‌رقمی، با رقم‌های متفاوت، ساخت، به‌نحوی که بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد؟

*۸۷. عدد ۱۳۷۵ را به‌صورت مجموع n عدد مرکب نوشته‌ایم، به‌نحوی‌که نمی‌توان آن را به‌صورت $n + ۱$ عدد مرکب نوشت. n را پیدا کنید.

*۸۸. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که رقم سمت راست آن، برابر ۴ باشد و اگر این رقم را از سمت راست عدد، به سمت چپ آن منتقل کنیم، عدد ما، ۴ برابر شود.

۸۹. A و B،زیرمجموعه‌هائی از مجموعهٔ C هستند و می‌دانیم، برای

هر زیرمجموعهٔ دلخواهی از C مثل X داریم:

$$X \cap A = X \cup B$$

زیرمجموعه‌های A و B را پیدا کنید.

*۹۰. بین رقم‌های یک عدد دورقمی، رقم ۰ را گذاشته‌ایم، عددی سه‌رقمی به‌دست آمده که بر عدد اصلی دورقمی بخش‌پذیر است. بزرگترین و کوچکترین خارج‌قسمت ممکن را (که عددی درست باشد)، پیدا کنید.

*۹۱. به‌کمک سه‌رقم مختلف، که هیچ‌کدام برابر صفر نیستند، همهٔ عددهای سه‌رقمی ممکن را ساخته‌ایم. مجموع دو عدد بزرگتر از این عددهای سه‌رقمی، برابر ۱۴۴۴ شده‌است. این سه‌رقم را پیدا کنید.

*۹۲. a، b، c، d، e، f و g، هرکدام یک رقم‌اند و می‌دانیم.

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg} \\ \{a, b\} \cup \{c, d\} = \{e, f, g\} \end{cases}$$

مساله چند جواب دارد؟ جواب‌ها را پیدا کنید.

*۹۳. مجموع رقم‌های عدد x برابر y و مجموع رقم‌های عدد y برابر عدد z شده‌است. مطلوب است عددهای x، y و z، به‌شرطی که

$$x + y + z = 60$$

۴. توان

§۱. تکرار عمل ضرب، یعنی توان

در ریاضیات، تکرار یک عمل، می‌تواند معنای تازه‌ای پیدا کند:

ـ اگر عدد ۱ را درنظر بگیریم و یک واحد به آن اضافه کنیم، عدد ۲ به‌دست می‌آید؛ با اضافه کردن واحد به ۲، عدد ۳، سپس عدد ۴ و غیره را می‌توان به‌دست آورد. *تکرار «عمل اضافه کردن واحد» دنبالهٔ عددهای طبیعی را می‌سازد.*

ـ تکرار عمل جمع، وقتی تنها بایک عدد سروکار داشته‌باشیم، عمل ضرب را به‌وجود می‌آورد:

$$۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۴ \times ۱۲$$

ـ تکرار عمل تفریق، مفهوم عمل تقسیم را روشن می‌کند:

$$۳۰ - ۶ = ۲۴;\ ۲۴ - ۶ = ۱۸;$$
$$۱۸ - ۶ = ۱۲;\ ۱۲ - ۶ = ۶;\ ۶ - ۶ = ۰;$$

عمل تفریق، ۵ بار تکرار شده‌است، پس

$$۳۰ : ۵ = ۶ \text{ یا } ۳۰ : ۶ = ۵$$

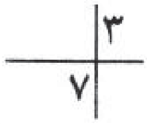
اکنون فرض کنید بخواهیم عدد ۷ را ۳ بار در خودش ضرب کنیم:

$$۷ \times ۷ \times ۷ = ۴۹ \times ۷ = ۳۴۳$$

در این‌جا هم، مثل موردهای قبل، راه ساده‌تری برای نوشتن انتخاب کرده‌اند:

$$۷ \times ۷ \times ۷ = ۷^{۳}$$

نماد + را درنظر بگیرید. برای این‌که نشان دهیم، باید عدد ۷ را ۳ بار در خودش ضرب کنیم، ۷ را در گوشهٔ پایین و سمت چپ این نماد و ۳ را در گوشهٔ راست و بالای آن می‌نویسیم.



و برای سادگی، خود نماد + را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم: $۷^۳$. ۷ را پایه و ۳ را **نما** می‌نامیم. $۷^۳$، یک **توان** است: $۷^۳$، یعنی ۷ را سه بار در خودش ضرب کنیم.

* ریاضی‌دانان ایرانی، مثل خوارزمی، کرجی، خیام و کاشانی، که در زمینهٔ «جبر» کار کرده‌اند، برای نوشتن یک عبارت جبری از هیچ نمادی استفاده نمی‌کردند. آن‌ها مجهول یا متغیر را «شیء»؛ توان دوم را «مال»، توان سوم را «کعب» [به‌جای «مکعب»]، توان چهارم را «مال‌مال»، توان پنجم را «مال کعب» و توان ششم را «کعب‌کعب» می‌نامیدند و همه‌چیز را با بیان شرح می‌دادند.

به این مساله، که از کتاب «جبر و مقابله» خوارزمی برداشته شده است، توجه کنید (با اندکی تغییر در جمله‌بندی‌ها):

«ده را طوری به دو بخش تقسیم کنید که، اگر هر بخش را در خودش ضرب و دو حاصل‌ضرب را با هم جمع کنیم، پنجاه‌وهشت به‌دست آید».

درواقع، منظور خوارزمی، حل این معادله است:

$$x^{۲} + (۱۰ - x)^{۲} = ۵۸$$

اکنون، به راه‌حل مساله ـ با بیان خوارزمی ـ توجه کنید:

«یکی از بخش‌ها را **شیء** فرض کنید و دیگری را **ده منهای شیء**». که به زبان امروزی، یعنی «یکی از بخش‌ها را x و دیگری را $۱۰ - x$

بگیرید. خوارزمی می‌گوید: «صد به‌اضافهٔ دو مال و بیست شیء ناقص، برابر پنجاه‌وهشت قرار می‌دهی». دو مال، یعنی $۲x^۲$ و بیست شیء ناقص یعنی $-۲۰x$؛ جمله خوارزمی، به زبان امروزی می‌شود:

$$۱۰۰ + ۲x^۲ - ۲۰x = ۵۸$$

خوارزمی ادامه می‌دهد: «بیست شیء ناقص را جبر می‌کنی و به پنجاه‌وهشت می‌افزایی» که، به زبان امروزی، یعنی، جملهٔ منفی $-۲۰x$ را به‌طرف دیگر معادله می‌بری، می‌شود

$$۱۰۰ + ۲x^۲ = ۵۸ + ۲۰x$$

لازم نیست، مسالهٔ خوارزمی را با زبان او ادامه دهیم، تنها می‌خواستیم با نوع نوشتن و عمل ریاضی‌دانان ایرانی، و با اصطلاح‌های آن‌ها، اندکی آشنا شوید.

نمادی که امروز برای توان‌ها به‌کار می‌بریم و آن‌ها را به‌صورت $a^۲$، $a^۳$، $a^۴$، و غیره می‌نویسیم، از رنه‌دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی است که آن را از سال ۱۶۳۷ میلادی معمول کرد.

§۲. ردیف عمل‌ها

وقتی با عددهای درست کار می‌کردیم، دیدیم، اگر دریک ردیف عمل، پرانتزی وجود نداشته‌باشد، دو عمل ضرب و تقسیم، بر دو عمل جمع و تفریق مقدم‌اند. اکنون تاکید می‌کنیم، *عمل توان بر عمل‌های ضرب و تقسیم مقدم است*. وقتی داشته‌باشیم:

$$۵ \times ۲^۴$$

عمل $۲^۴$ (یعنی توان) پیش از عمل ضرب باید انجام شود:

$$۵ \times ۲^۴ = ۵ \times (۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲) = ۵ \times ۱۶ = ۸۰$$

اگر قرار بود اول ۵ را در ۲ ضرب کنیم و، سپس، نتیجهٔ ضرب را به‌توان ۴ برسانیم، باید آن را این‌طور می‌نوشتیم:

$$(۵ \times ۲)^{۴} = ۱۰^{۴} = ۱۰۰۰۰$$

می‌بینید $۲^{۴} \times ۵$ و $(۲ \times ۵)^{۴}$ چقدر با هم فرق دارند.

مثال. حاصل این عبارت عددی را محاسبه کنید:

$$A = ۲۱۵ + ۱۲۶ : ۳^{۲} - ۷^{۳} \times ۲ : ۱۴$$

حل. ابتدا فقط عمل‌های توان را انجام می‌دهیم:

$$A = ۲۱۵ + ۱۲۶ : ۹ - ۳۴۳ \times ۲ : ۱۴$$

بعد، عمل‌های ضرب و تقسیم را، به‌همان ردیفی که وجود دارند:

$$A = ۲۱۵ + ۱۴ - ۶۸۶ : ۱۴ = ۲۲۹ - ۴۹ = ۱۸۰$$

§۳. عمل با توان‌ها

۱) درحالت کلی، برای جمع دو توان باهم، تفریق دو توان از یکدیگر، ضرب دو توان در یکدیگر و تقسیم دو توان برهم، باید نتیجهٔ هر توان را به‌طور جداگانه به‌دست آورد، سپس عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم را انجام داد:

$$۲^{۳} + ۳^{۲} = ۸ + ۹ = ۱۷;\ ۴^{۳} - ۳^{۳} = ۶۴ - ۲۷ = ۳۷;$$
$$۲^{۵} \times ۳^{۲} = ۳۲ \times ۹ = ۲۸۸;\ ۷^{۲} : ۳^{۳} = \frac{۴۹}{۲۷} = ۱\frac{۲۲}{۲۷}$$

۲) تنها در ضرب و در تقسیم (ونه در جمع و تفریق)، به‌شرطی که پایه‌ها یا نماها با هم برابر باشند، می‌توان راه ساده‌تری برای عمل‌های ضرب و تقسیم پیدا کرد.

اول. ضرب دو توان با پایه‌های برابر. فرض کنید بخواهیم حاصل‌ضرب دو عدد $۷^۲$ و $۷^۳$ را پیدا کنیم:

$$۷^۲ \times ۷^۳ = (۷ \times ۷) \times (۷ \times ۷ \times ۷) = ۷^۵$$

یعنی به‌شرط این‌که $m \in \mathbf{N}$ و $n \in \mathbf{N}$، آن‌وقت

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (۱)$$

دوم. *تقسیم دو توان با پایه‌های برابر.* مطلب با مثال روشن می‌شود:

$$۱۵^۷ : ۱۵^۴ = \frac{۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵}{۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵} =$$
$$= ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۱۵^۳$$

یعنی، برای هر $m \in \mathbf{N}$ و $n \in \mathbf{N}$ و $m > n$ داریم:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (۲)$$

یادداشت. در ریاضیات اغلب تلاش می‌کنند، تاجایی که ممکن است، قاعده‌ها و دستورها، کمتر مشروط باشند. درمورد تقسیم، اگر شرط $m > n$ را حذف کنیم، برای دو حالت $m = n$ و $m < n$، دستور (۲)، مثلاً چنین نتیجه‌ای می‌دهد:

$$a^۲ : a^۲ = a^۰ \text{ و } a^۲ : a^۴ = a^{-۲}$$

ولی می‌دانیم، خارج‌قسمت دو عدد برابر، مساوی ۱ می‌شود، یعنی $a^{۲} : a^{۲}$ برابر است با ۱. به‌همین مناسبت، قبول کرده‌اند که

$$a^{۰} = ۱$$

یعنی، برای هر پایهٔ دلخواه (ولی مخالف صفر)، وقتی نما برابر صفر باشد، حاصل عدد را برابر واحد می‌گیریم.

$$۱۰^{۰} = ۱, (\frac{۲}{۵})^{۰} = ۱, (-۷)^{۰} = ۱$$

و اما در تقسیم $a^{۲} : a^{۴}$ داریم:

$$a^{۲} : a^{۴} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{۱}{a^{۲}}$$

به‌همین مناسبت $a^{-۲}$ راهم به‌معنای $\frac{۱}{a^{۲}}$ پذیرفته‌اند:

$$a : a^{۵} = a^{-۴} = \frac{۱}{a^{۴}};$$

$$(\frac{۳}{۵})^{۲} : (\frac{۳}{۵})^{۳} = (\frac{۳}{۵})^{-۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳}$$

سوم. *ضرب دو توان با نماهای برابر.* به‌مثالی توجه کنیم:

$$a^{۳} \times b^{۳} = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) =$$
$$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times b)^{۳}$$

یعنی، برای ضرب دو توان با نماهای برابر، پایه‌ها را درهم ضرب می‌کنیم و همان نما را برای آن درنظر می‌گیریم:

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \qquad (۳)$$

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۴} = \left(\frac{۲}{۵} \times \frac{۵}{۲}\right)^{۴} = ۱^{۴} = ۱$$

چهارم. *تقسیم دو توان با نماهای برابر.* بازهم به مثال توجه کنید:

$$a^{۵} : b^{۵} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} =$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{۵}$$

یعنی، شبیه ضرب، برای تقسیم دو توان، وقتی نماها برابر باشند، پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به‌توان همان نما می‌رسانیم:

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$۲^{۳} : ۳^{۳} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳};\ ۱۸۶^{۳} : ۳۱^{۳} = ۶^{۳} = ۲۱۶$$

۳) وقتی بخواهیم یک عدد توان‌دار را به‌توان جدیدی برسانیم، به‌شرط درست بودن نماها، نماها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} (m \in \mathbf{Z} \text{ و } n \in \mathbf{Z})$$

به‌عنوان مثال

$$(a^{۲})^{۳} = a^{۲} \cdot a^{۲} \cdot a^{۲} = a^{۳\times۲} = a^{۶}$$
$$(a^{۲})^{-۳} = \frac{۱}{(a^{۲})^{۳}} = \frac{۱}{a^{۶}} = a^{-۶}$$

یادداشت. توجه کنید $(a^{۲})^{۳}$ با $a^{۲^{۳}}$ فرق دارد. درواقع، $a^{۲^{۳}}$ را به‌جای $a^{(۲^{۳})}$ می‌نویسند:

$$(۲^{۳})^{۲} = ۲^{۶} = ۶۴;$$
$$۲^{۳^{۲}} = ۲^{(۳^{۲})} = ۲^{۹} = ۵۱۲$$

§۴. تجزیه یک عدد مرکب، به‌صورت ضرب عامل‌های اول.

هر عدد مرکب، از ضرب عددهای اول به‌دست می‌آید:

$$۴ = ۲ \times ۲ = ۲^{۲}; ۱۴ = ۲ \times ۷;$$

$$۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ = ۲^{۲} \times ۵$$

ساده‌ترین روش، برای تجزیهٔ یک عدد، روش تقسیم‌های متوالی است. فرض کنید، بخواهیم عدد ۵۰۴ را به ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. ردیف عددهای اول کوچکتر از ۱۰۰ را می‌شناسیم:

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷$$

$$۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷, ۱۰۱$$

عدد ۵۰۴ بر ۲، یعنی کوچکترین عدد اول بخش‌پذیر است.

$$۵۰۴ : ۲ = ۲۵۲ \qquad (۱)$$

خارج‌قسمت، یعنی ۲۵۲ هم بر ۲ بخش‌پذیر است:

$$۲۵۲ : ۲ = ۱۲۶ \qquad (۲)$$

باز هم خارج‌قسمت بر ۲ بخش‌پذیر است:

$$۱۲۶ : ۲ = ۶۳ \qquad (۳)$$

۶۳ بر ۲ بخش‌پذیر نیست، ولی بر عدد اول بعدی، یعنی ۳، بخش‌پذیر است:

$$۶۳ : ۳ = ۲۱ \qquad (۴)$$

و ۲۱ هم بر ۳ بخش‌پذیر است:

$$21 : 3 = 7 \qquad (5)$$

۷، عددی اول است. در این پنج تقسیم، ۳بار بر ۲، ۲بار بر ۳ تقسیم کردیم و خارج‌قسمت برابر عدد اول ۷ شد.

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

ولی بهتر و ساده‌تر است، همهٔ تقسیم‌ها را یک‌جا و باهم انجام دهیم:

۵۰۴	۲
۲۵۲	۲
۱۲۶	۲
۶۳	۳
۲۱	۳
۷	۷
۱	

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

تمرین‌ها

۹۴. به‌این پرسش‌ها پاسخ دهید:

۱) آیا a^0 همیشه برابر است با ۱؟ $(x-2)^0$ چطور؟

۲) آیا همیشه $a^n \neq b^n$؟

۳) می‌دانیم $a > b > 0$. آیا $a^n > b^n$؟

۴) آیا همیشه $x^2 > x$؟

۹۵. محاسبه کنید:

۱) $3^4 \times 9^{-2}$؛ ۲) $2^{-4}(2^{-2})^{-3}$؛

۳) $\frac{3^{-5}}{3^4} : 3^{-7}$؛ ۴) $(5^{-5})^{-1} \cdot (\frac{1}{2})^{-2} : 10^{-5}$؛

۵) $(3^{-3})^{-2} \cdot 3^{-5} \times 27$، ۶) $4^{-6} \cdot 256^2 \cdot 2^4$

۹۶. m کدام عدد درست باشد تا داشته‌باشیم:

$$۱)\ ۷^{۲} \times ۷^{m} = ۷\ ; \qquad ۲)\ ۵^{۳} \times ۵^{m} = \frac{۱}{۵};$$
$$۳)\ ۱۱^{-۳} \times ۱۲۱^{m} = ۱۱, \qquad ۴)\ ۹^{m} : ۳^{۵} = ۳;$$
$$۵)\ ۳^{-۲} \times ۳^{۴} \times ۳^{m} = ۳^{۷}; \quad ۶)\ ۲^{-۱} \times ۲^{m} = ۹ \times ۲^{۵} - ۴ \times ۲^{m}$$

۹۷. اگر بدانیم $a^m = b^m$، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹۸. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱)\ (۲۷a^{۳}b^{۲}c)(۳ab^{۵}); \quad ۲)\ (x^{۱۲}y^{۷}t^{۳}) : (x^{۷}y^{۳}t); \quad ۳)\ (۲p^{۴}q^{۳}s^{۱۴})^{۵}$$

۹۹. با استفاده از نماهای منفی، این کسرها را به‌صورت عبارت‌هایی غیرکسری بنویسید.

$$۱)\ \frac{۱}{x^{۵}}; \qquad ۲)\ ۰/۰۱; \quad ۳)\ ۰/۰۰۰۰۰۱;$$
$$۴)\ \frac{۱}{۵}; \qquad ۵)\ \frac{۱}{a}; \qquad ۶)\ \frac{۲}{۷};$$
$$۷)\ \frac{a}{a+b}; \quad ۸)\ \frac{۳a^{۴}b^{۲}}{cd^{۳}}$$

۱۰۰. این عبارت‌ها را، بدون وجود توان منفی، بنویسید:

$$۱)\ ۳^{-۲} \times ۵^{-۳} \times ۲^{۷}; \quad ۲)\ a^{۲} \cdot b^{-۱}; \quad ۳)\ \frac{a^{-۱}b}{c^{-۱}d}$$

۱۰۱. این عددها را به‌صورت ضرب توان‌هایی از عددهای اول تجزیه کنید:

۱)۶۸۷۹۶؛ ۲)۸۰۲۴؛ ۳)۵۱۰۵۱۰

۱۰۲. ثابت کنید، ۹۷۱ عددی اول است.

۱۰۳. به‌کمک تجزیه به‌عامل‌های اول، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک را پیدا کنید:

$$1)36, 60; \quad 2)25, 35; \quad 3)80, 56;$$
$$4)169, 576, \quad 5)2772, 62832$$

*۱۰۴. همهٔ عددهای سه‌رقمی را پیدا کنید که، هرکدام از آن‌ها، تنها ۵ مقسوم‌علیه (بخش‌یاب) داشته‌باشد.

*۱۰۵. رقم سمت راست عدد 9^{9^9} را پیدا کنید.

*۱۰۶. عدد 7^{7^7} به چه رقمی ختم می‌شود؟

*۱۰۷. از تقسیم عدد 901^{1374} بر ۳۱، چه باقی‌مانده‌ای به‌دست می‌آید؟

*۱۰۸. ثابت کنید، اگر عددی اول باشد، یا به‌صورت $6k - 1$ است ویا به‌صورت $6k + 1$ $(k \in \mathrm{N})$، به‌جز عددهای اول ۲ و ۳. آیا عکس این حکم درست است، یعنی هر عدد به‌صورت $6k \pm 1$ $(k \in \mathrm{N})$ عددی اول است؟

*۱۰۹. ثابت کنید، نمی‌توان عدد اول p را طوری پیدا کرد که، درضمن، هر دو عدد $p + 5$ و $p + 10$ هم اول باشند.

*۱۱۰. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دو عدد $p + 10$ و $p + 14$ هم اول باشند.

*۱۱۱. کدام بزرگترند، A یا B؟ به‌شرطی‌که

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20$$
$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1000000$$

*۱۱۲. دنبالهٔ عددهایی را درنظر می‌گیریم که با ۸ آغاز شده و هر جمله

۶ واحد از جملهٔ قبل بیشتر باشد.

$$8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, \ldots$$

آیا در بین جمله‌های این دنباله، می‌توان توان دوم، توان سوم، توان چهارم یا توان پنجم یک عدد طبیعی را پیدا کرد؟

*۱۱۳. کوچکترین عدد اولی را پیدا کنید که بتوان آن به‌صورت مجموع ۲ و ۳ و ۴ و ۵ عدد اول نوشت.

*۱۱۴. ثابت کنید عدد $2222^{5555} + 5555^{2222}$ بر عدد ۷ بخش‌پذیر است.

*۱۱۵. از دو عدد 242^{11} و 83^{14}، کدام کوچکتر است؟

*۱۱۶. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عددی بر ۷ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم همان عدد بر ۱۳ برابر ۲ شده‌است. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم این عدد بر حاصل‌ضرب 13×7، یعنی ۹۱، چقدر است؟ مجموعهٔ این‌گونه عددها را پیدا کنید.

*۱۱۷. عدد طبیعی N را بر ۷، ۱۳ و ۱۷ تقسیم کرده‌ایم، به‌ترتیب، باقی‌مانده‌های ۵، ۲ و ۱ به‌دست آمده‌است. کوچکترین عدد N را پیدا کنید. مجموعه‌ای را بنویسید که عضوهای آن، دارای ویژگی عدد N باشند.

*۱۱۸. 8^9 بزرگتر است یا 9^8؟

*۱۱۹. ثابت کنید دنبالهٔ عددهای اول دنباله‌ای بی‌پایان است.

*۱۲۰. کدام بزرگترند: $100x - 1000$ یا $50x - 800$؟

۵. مجموعهٔ عددهای گویا

§۱. نسبت دو عدد طبیعی

برای مقایسهٔ دو عدد طبیعی از نسبت آن‌ها استفاده می‌کنند.

اگر بخواهیم دو عدد ۱۲ و ۴ را باهم مقایسه کنیم، به‌دو گونه می‌توان داوری کرد.

۱) عدد ۱۲، به‌اندازهٔ ۸ واحد، از عدد ۴ بیشتر است:

$$۱۲ - ۴ = ۸;$$

۸، یعنی تفاضل دو عدد ۴ و ۱۲ را، **نسبت عددی** یا **نسبت حسابی** این دوعدد گویند.

نسبت حسابی نشان می‌دهد که در مقایسهٔ دو عدد طبیعی، کدام عدد بزرگتر است و چقدر!

۲) عدد ۱۲، سه‌برابر عدد ۴ است:

$$۱۲ : ۴ = ۳;$$

عدد ۳ را **نسبت هندسی** ۱۲ و ۴ گویند.

یادداشت. وقتی واژهٔ «نسبت» را، بدون واژهٔ اضافی «حسابی» یا «هندسی» به‌کار برند، منظور «نسبت هندسی» است. دلیل این امر آن است که، در ریاضیات و دیگر دانش‌ها، کاربرد «نسبت هندسی» خیلی بیشتر از «نسبت حسابی» است. دراین کتاب هم، هرجا با واژهٔ «نسبت» روبه‌رو شویم، منظور نسبت هندسی است.

۳) در نسبت هندسی دوعدد، بیشتر، به‌جای نشانهٔ تقسیم (:)، از نشانه کسر (—) استفاده می‌کنند و «۴ : ۱۲» را به‌شکل $\frac{۱۲}{۴}$ می‌نویسند.

دراین‌صورت می‌توان نسبت ۴ بر ۱۲ را هم پیدا کرد:

$$۴ : ۱۲ = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

می‌گوییم، عدد ۴ یک‌سوم عدد ۱۲ است.

یادداشت. باید بگوییم، عدد ۱۲ سه برابر عدد ۴ است؛ عدد ۴، یک‌سوم عدد ۱۲ است. در برخی کتاب‌ها و مقاله‌ها، با پیروی از اصطلاح معمول در کتاب‌های بیگانه، می‌نویسند: ۱۲، سه‌برابر از ۴ بیشتر است ویا ۴، سه‌برابر از ۱۲ کمتر است.این شکل بیان، در زبان فارسی نادرست است و موجب اشتباه می‌شود:

۱۲ به‌اندازهٔ دوبرابر ۴، از ۴ بیشتر است، نه سه‌برابر آن، همچنین ۴، به‌اندازهٔ دوبرابر خودش از ۱۲ کمتر است، نه سه‌برابر.

از این‌گذشته، در «نسبت هندسی» کاری به بیشتر بودن و کمتر بودن نداریم. دراین‌جا صحبت برسر چند برابر بودن یک عدد، در مقایسه با عدد دیگر است.

§۲. مفهوم کسر و ویژگی‌های آن

به‌هرعددی‌که از نسبت دوعدد درست(مثبت یا منفی یا صفر)به‌دست آمده باشد،کسر گویند.هریک‌ازعددهای $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{-۴}{۷}$ ویا $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ $b \neq ۰$ یک کسر است.

به‌این چند نکته توجه کنیم

۱) در کسر $\frac{a}{b}$، a را صورت و b را مخرج کسر گویند.

۲) در کسر $\frac{a}{b}$ عدد b نمی‌تواند برابر با صفر باشد، زیرا تقسیم بر ۰ معنی ندارد. هروقت بایک کسر سروکار داریم، به‌یاد داشته‌باشیم که مخرج آن نمی‌تواند، برابر صفر باشد.

۳) در کسر $\frac{a}{b}$، بهتر است b را همیشه عددی مثبت فرض کنیم.

$$-\frac{۷}{۹} = \frac{-۷}{۹}; \frac{۵}{-۶} = \frac{-۵}{۶}$$

۴) اگر $a = ۰$، آن‌وقت کسر $\frac{a}{b}$، به‌ازای هر عدد دلخواه $b \neq ۰$، برابر صفر است: $\frac{۰}{b} = ۰ \; (b \neq ۰)$.

۵) اگر $b = ۱$، آن‌وقت $\frac{a}{b} = a$:

$$\frac{۳}{۱} = ۳, \frac{-۷}{۱} = -۷$$

بنابراین، مجموعهٔ عددهای درست، یعنی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$، زیرمجموعه‌ای از مجموعه کسرهاست.

۶) مجموعهٔ همه کسرها را، **مجموعهٔ عددهای گویا** گویند و با نماد $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

(مجموعهٔ عددهای‌طبیعی، زیرمجموعه‌ای‌از مجموعهٔ عددهای‌حسابی، مجموعهٔ عددهای حسابی، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای درست و مجموعهٔ عددهای درست زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای گویا است).

۷) اگر a و b را عددهای طبیعی فرض کنیم، به‌شرط $a < b$ داریم $\frac{a}{b} < ۱$ واگر $a > b$، آن‌گاه $\frac{a}{b} > ۱$.

۸) بافرض $a \in \mathbf{N}$ و $b \in \mathbf{N}$، اگر به‌صورت مخرج کسر $\frac{a}{b}$، عددی طبیعی اضافه کنیم، کسر $\frac{a}{b}$ به واحد نزدیکتر می‌شود. c را عددی طبیعی می‌گیریم، دراین صورت

اگر $\frac{a}{b} < 1$، آنوقت $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$؛

اگر $\frac{a}{b} > 1$، آنوقت $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

کسر $\frac{۳}{۴}$ کوچکتر از واحد است. اگر ۲ واحد به صورت و مخرج اضافه کنیم، به کسر $\frac{۵}{۶}$ می‌رسیم که از $\frac{۳}{۴}$ بزرگتر است، زیرا

$$\frac{۵}{۶} - \frac{۳}{۴} = \frac{۱۰ - ۹}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

$\frac{۵}{۶}$ به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ از $\frac{۳}{۴}$ بزرگتر است.

ولی اگر به‌صورت مخرج کسر $\frac{۴}{۳}$، دو واحد اضافه کنیم، به‌کسر $\frac{۶}{۵}$ می‌رسیم که از $\frac{۴}{۳}$ کوچکتر است، زیرا

$$\frac{۴}{۳} - \frac{۶}{۵} = \frac{۲۰ - ۱۸}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

$\frac{۶}{۵}$ به‌اندازهٔ $\frac{۲}{۱۵}$ از $\frac{۴}{۳}$ کوچکتر است.

در هردوحالت، با اضافه کردن یک عدد طبیعی به‌صورت و مخرج کسر، مقدار کسر به واحد نزدیکتر می‌شود.

۹) اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی مخالف صفر ضرب و یا بر عددی مخالف صفر تقسیم کنیم، مقدار کسر تغییر نمی‌کند.

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲۰۰}{۵۰۰};$$

$$\frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۴}{۸} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}; \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m} \quad (m \neq ۰)$$

۱۰) برای ضرب دو کسر در یکدیگر، می‌توان صورت‌ها را درهم و مخرج‌ها را درهم ضرب کرد؛ و برای تقسیم، می‌توان صورت‌ها را برهم و مخرج‌ها را برهم تقسیم کرد:

$$\frac{۳}{۸} \times \frac{۷}{۵} = \frac{۳ \times ۷}{۸ \times ۵} = \frac{۲۱}{۴۰};$$

$$\frac{۲۵}{۳۴} : \frac{۵}{۱۷} = \frac{۲۵ : ۵}{۳۴ : ۱۷} = \frac{۵}{۲}$$

ولی برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر، می‌توان مقسوم‌علیه را معکوس کرد (یعنی جای صورت و مخرج آن را باهم عوض کرد) و، سپس، آن‌ها را درهم ضرب کرد:

$$\frac{۶}{۱۳} : \frac{۱}{۵} = \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۵}{۱} = \frac{۳۰}{۱۳}$$

۱۱) برای پیدا کردن مجموع یا تفاضل دو کسر، باید ابتدا، کسرها را به یک مخرج تبدیل و، سپس، مجموع یا تفاضل صورت‌ها را به‌دست آورد و همان مخرج مشترک را، مخرج آن قرار داد:

$$\frac{۵}{۱۷} + \frac{۳}{۱۷} = \frac{۵ + ۳}{۱۷} = \frac{۸}{۱۷};$$

$$\frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹} + \frac{۳}{۹} = \frac{۴}{۹};$$

$$\frac{۵}{۱۶} - \frac{۱}{۷} = \frac{۵ \times ۷ - ۱۶}{۱۶ \times ۷} = \frac{۳۵ - ۱۶}{۱۱۲} = \frac{۱۹}{۱۱۲}$$

۱۲) در کسرهای بزرگتر از واحد، می‌توان با انجام عمل تقسیم صورت مخرج، مقدار درست عدد را جدا کرد. کسر $\frac{۲۷}{۱۳}$ را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۷ & ۱۳ \\ \cline{2-2} ۲۶ & ۲ \\ \hline ۱ & \end{array} \Rightarrow \frac{۲۷}{۱۳} = ۲ + \frac{۱}{۱۳}$$

ولی چنین معمول شده‌است که علامت + را نمی‌گذارند:

$$۲+\frac{۱}{۱۲}=۲\frac{۱}{۱۳}$$

مواظب باشید $\frac{۱}{۱۳}\times ۲$، یعنی $\frac{۲}{۱۳}$، ولی $۲\frac{۱}{۱۳}$ یعنی $\frac{۲۷}{۱۳}$. $a\cdot\frac{b}{c}$ یعنی $\frac{ab}{c}$، ولی $a\frac{b}{c}$ یعنی $a+\frac{b}{c}$.

عمل جدا کردن عدد درست را از کسر، **رفع** گویند.

۱۳) برعکس می‌توان عدد درست را وارد کسر کرد

$$۲\frac{۱}{۱۳}=۲+\frac{۱}{۱۳}=\frac{۲۶+۱}{۱۳}=\frac{۲۷}{۱۳}$$

که به‌آن، **عمل تجنیس** گویند.

۱۴) مجموعهٔ کسرها، یعنی مجموعهٔ عددهای گویا، نسبت به عمل‌های جمع؛ تفریق، ضرب، تقسیم و توان، یک مجموعهٔ بسته است:

مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب، خارج قسمت و توان یک عدد گویا، باز هم عددی گویا است.

$$(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۱۶};$$
$$(\frac{۲}{۳})^۵=\frac{۲^۵}{۳^۵}=\frac{۳۲}{۲۴۳}$$

۱۵) بین هردو عدد گویا، هرقدر به‌هم نزدیک باشند، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

مثال. بین دو عدد گویای $\frac{۴۱}{۴۳}$ و $\frac{۴۲}{۴۳}$، ۹۹ عدد گویا پیدا کنید (عددهایی که از $\frac{۴۱}{۴۳}$ بزرگتر واز $\frac{۴۲}{۴۳}$ کوچکتر باشند).

حل. *راه‌حل اول.* می‌دانیم، اگر صورت و مخرج کسری را دریک عدد ضرب کنیم، مقدار کسر تغییر نمی‌کند. پس

$$\frac{۴۱}{۴۳} = \frac{۴۱۰۰}{۴۳۰۰} \text{ و } \frac{۴۲}{۴۳} = \frac{۴۲۰۰}{۴۳۰۰}$$

(صورت و مخرج را درهر کسر ۱۰۰ برابر کردیم) اکنون روشن است که مقدار هریک از کسرهای

$$\frac{۴۱۰۱}{۴۳۰۰}, \frac{۴۱۰۲}{۴۳۰۰}, \ldots, \frac{۴۱۵۸}{۴۳۰۰}, \ldots, \frac{۴۱۹۹}{۴۳۰۰}$$

(که تعداد آن‌ها برابر ۹۹ است)، از $\frac{۴۱}{۴۳}$ بزرگتر و از $\frac{۴۲}{۴۳}$ کوچکتر است.

راه‌حل دوم. ابتدا به‌یک قانون توجه کنیم: فرض کنیم کسر $\frac{a}{b}$ از کسر $\frac{c}{d}$ کوچکتر باشد. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. دراین‌صورت کسری که صورت آن، مجموع صورت‌ها و مخرج آن، مجموع مخرج‌های این دوکسر باشد، ازنظر مقدار، بین این دوکسر قرار دارد، یعنی

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مثلاً دوکسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ را درنظر بگیرید، $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۳}{۴}$ کوچکتر است. کسر $\frac{۱+۳}{۲+۴}$، یعنی $\frac{۴}{۶}$ یا $\frac{۲}{۳}$ از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر و از $\frac{۳}{۴}$ کوچکتر است:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < \frac{۳}{۴}$$

در مساله، با دوکسر $\frac{۴۱}{۴۳}$ و $\frac{۴۲}{۴۳}$ سروکار داریم، پس

$$\frac{۴۱}{۴۳} < \frac{۴۱+۴۲}{۴۳+۴۳} = \frac{۸۳}{۸۶} < \frac{۴۲}{۴۳}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان عدد گویایی بین دو عدد $\frac{۴۱}{۴۳}$ و $\frac{۸۳}{۸۶}$ و همچنین، عددی بین $\frac{۸۳}{۸۶}$ و $\frac{۴۲}{۴۳}$ پیدا کرد:

$$\frac{۴۱}{۴۳} < \frac{۱۲۴}{۱۲۹} < \frac{۸۳}{۸۶} < \frac{۱۲۵}{۱۲۹} < \frac{۴۲}{۴۳}$$

به‌همین ترتیب می‌توان بین هر دوعدد گویا (دراین ردیف عددها)، یک عدد قرار داد. با ادامهٔ این روش، می‌توانیم هرچند عدد گویا که مایل باشیم، بین دو عدد $\frac{۴۱}{۴۳}$ و $\frac{۴۲}{۴۳}$ قرار دهیم.

نتیجهٔ مهم. *برای یک عدد گویا نمی‌توانیم عددی پیدا کنیم که بلافاصله بعد یا بلافاصله قبل از آن واقع باشد،* زیرا هر عددی را، هرقدر نزدیک به عدد گویای $\frac{a}{b}$ درنظر بگیریم، بازهم بی‌نهایت عدد بین آن‌ها وجود دارد.

۱۶) کسر $\frac{a}{b}$ را، به‌شرطی که a و b نسبت به‌هم اول باشند (یعنی، بخشیاب مشترکی نداشته‌باشند)، کسر **ساده‌نشدنی** یا **تحویل‌ناپذیر** گویند. کسر $\frac{۳۰}{۹۱}$ تحویل‌ناپذیر است، زیرا ۳۰ و ۹۱ نسبت به‌هم اول‌اند و، بنابراین، نمی‌توان این کسر را ساده کرد. ولی کسر $\frac{۳۹}{۹۱}$ تحویل‌ناپذیر نیست، زیرا ۳۹ و ۹۱، هردو بر ۱۳ بخش‌پذیرند و، بنابراین ، کسر ساده می‌شود:

$$\frac{۳۹}{۹۱} = \frac{۳ \times ۱۳}{۷ \times ۱۳} = \frac{۳}{۷}$$

§۳. کسرهای دهدهی

ریاضی‌دانان ایرانی، به پیروی از ریاضی‌دانان عیلامی و بابلی، بیشتر از مبنای ۶۰ در عددنویسی و عددشماری استفاده می‌کردند. مثلاً می‌نوشتند: ۲درجه و ۵دقیقه و۳۰ ثانیه:

$$۲^\circ\, ۵'\, ۳۰''$$

که به‌معنای این عدد بود:

$$۲ + \frac{۵}{۶۰} + \frac{۳۰}{۳۶۰۰} = ۲ + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲۰} = ۲\frac{۱۱}{۱۲۰}$$

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی که دورهٔ حکومت تیموریان زندگی می‌کرد، برای نخستین بار، مقدارهای کمتر از واحد را به‌صورت دهدهی (یا اعشاری) نوشت.

برای پیدا کردن شکل دهدهی عدد، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم، مثلاً در عدد بالا، کسر $\frac{۱۱}{۱۲۰}$ به‌این صورت در می‌آید:

$$۱۱ : ۱۲۰ = ۰/۰۹۱۶۶۶...$$

سه‌نقطه‌ای که در پایان عدد گذاشته‌ایم، به‌معنای این است که رقم ۶ مرتباً تکرار می‌شود. در ریاضیات، برای این‌که نشان دهند، رقم ۶ تکرار می‌شود، عدد را به‌یکی از دوشکل زیر می‌نویسند:

$$\frac{۱۱}{۱۲۰} = ۰/۰۹۱\overline{۶} \text{ یا } \frac{۱۱}{۱۲۰} = ۰/۰۹۱(۶)$$

گونه‌های مختلف تبدیل کسر به‌صورت دهدهی

۱) اگر در مخرج کسر، تنها عامل‌های اول ۲ و ۵ وجود داشته باشد، کسر دهدهی در جایی تمام می‌شود و رقم یا رقم‌های تکراری پیدا نمی‌کند:

$$\frac{۲}{۵} = ۰/۴; \frac{۱}{۲} = ۰/۵; \frac{۳}{۲۵} = ۰/۱۲;$$
$$\frac{۷}{۸} = ۰/۸۷۵; \frac{۷}{۴۰} = ۰/۱۷۵; ...$$

این کسرها را، *کسرهای تحقیقی* گویند.

۲) اگر در مخرج کسر، عامل‌های اول ۲ و ۵ وجود نداشته‌باشد، شکل دهدهی عدد، تنها رقم‌های تکراری خواهد داشت:

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots = ۰/(۳);\ \frac{۲}{۱۱} = ۰/۱۸۱۸۱۸\ldots = ۰/(۱۸);$$

$$\frac{۳۵}{۱۱۱} = ۰/۳۱۵۳۱۵\ldots = ۰/(۳۱۵);$$

$$\frac{۹}{۱۰۱} = ۰/۰۸۹۱۰۸۹۱\ldots = ۰/(۰۸۹۱);$$

$$\frac{۵}{۱۳} = ۰/۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶۱۵\ldots = ۰/(۳۸۴۶۱۵);$$

$$\frac{۱۲}{۱۷} = ۰/(۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴)$$

این‌ها، کسرهای دوره‌ای ساده‌اند.

۳) وقتی که در مخرج کسر، هم عامل‌های ۲ یا ۵ وهم عامل‌های دیگر وجود داشته‌باشد، رقم یا رقم‌های تکراری، از رقم بلافاصله بعد از ممیز آغاز نمی‌شود.

$$\frac{۱}{۴ \times ۳ \times ۵} = \frac{۱}{۶۰} = ۰/۰۱۶۶۶\ldots = ۰/۰۱(۶);$$

$$\frac{۱۶۹}{۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱} = \frac{۱۶۹}{۳۳۰} = ۰/۵۱۲۱۲\ldots = ۰/۵(۱۲);$$

$$\frac{۶}{۵ \times ۱۱} = \frac{۶}{۵۵} = ۰/۱۰۹۰۹\ldots = ۰/۱(۰۹);$$

$$\frac{۱۱}{۱۴} = ۰/۷(۸۵۷۱۴۲)$$

این‌ها، کسرهای دوره‌ای مرکب‌اند.

یادداشت. ۱) کسرهای دوره‌ای را، کسرهای متناوب هم می‌گویند؛ ۲) رقم یا رقم‌هایی را که در کسرهای دوره‌ای تکرار می‌شوند، **دورهٔ گردش** آن گویند. در

کسر دهدهی (۲۵) ۰/۰، دورهٔ گردش ۲۵ و در کسر دهدهی (۱۴۲)۱۵ /۰، ۱۴۲ دورهٔ گردش و ۱۵ رقم‌های غیرگردش‌اند؛ ۳) کسرهای عادی مثل $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۱۱}{۱۷}$ را، اغلب کسر متعارفی می‌نامند.

۴§. تبدیل کسرهای دهدهی به کسرهای متعارفی

۱) کسرهای دهدهی غیردوره‌ای (که به آن‌ها کسرهای دهدهی تحقیقی هم می‌گویند) به سادگی و به همان صورتی که بیان می‌شوند، قابل تبدیل به کسرهای متعارفی‌اند:

۰/۲، یعنی دو دهم، بنابراین $\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۲$؛

۰/۲۴، یعنی بیست‌وچهار صدم، بنابراین $\frac{۶}{۲۵} = \frac{۲۴}{۱۰۰} = ۰/۲۴$.

۲) برای تبدیل کسر دوره‌ای ساده به کسر متعارفی، یک دورهٔ گردش را در صورت کسر می‌نویسیم و سپس، به تعداد رقم‌های دورهٔ گردش، رقم ۹ را در مخرج قرار می‌دهیم:

$$۰/۳۳۳\ldots = ۰/(۳) = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳};$$

$$۰/۲۷۲۷۲۷\ldots = ۰/(۲۷) = \frac{۲۷}{۹۹} = \frac{۳}{۱۱};$$

$$۰/۲۹۷۲۹۷\ldots = ۰/(۲۹۷) = \frac{۲۹۷}{۹۹۹} = \frac{۱۱}{۳۷}$$

۳) برای تبدیل کسر دوره‌ای مرکب به کسر متعارفی، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم:

در صورت کسر ابتدا رقم‌های غیرگردش را می‌نویسیم و یک دورهٔ گردش را در سمت آن قرار می‌دهیم، سپس، عدد شامل رقم‌های غیرگردش را ازآن کم می‌کنیم. در مخرج کسر، به تعداد رقم‌های دورهٔ گردش ۹ و به تعداد

رقم‌های غیرگردش صفر قرار می‌دهیم:

$$۰/۲۶۶۶... = ۰/۲(۶) = \frac{۲۶ - ۲}{۹۰} = \frac{۲۴}{۹۰} = \frac{۴}{۱۵};$$

$$۰/۰۱۸۱۸... = ۰/۰(۱۸) = \frac{۰۱۸ - ۰}{۹۹۰} = \frac{۱}{۵۵};$$

$$۰/۵۸۳۳... = ۰/۵۸(۳) = \frac{۵۸۳ - ۵۸}{۹۰۰} = \frac{۷}{۱۲}$$

* **یادداشت تاریخی.** مفهوم «کسر» بعد از آن که تصور کم‌وبیش مشخصی دربارهٔ عددهای طبیعی به‌وجود آمد، پدیدار شد. مفهوم کسر هم مثل مفهوم عددهای طبیعی، به‌تدریج و درطول زمانی طولانی شناخته شد. مفهوم «نصف» یا «نیم» خیلی زودتر از مفهوم‌های «یک‌سوم» و «یک‌چهارم» پیدا شد. و این دومفهوم «یک‌سوم» و «یک‌چهارم» هم، پیش از سایر کسرها وارد در زبان و «محاسبه» شد. تقریباً در همهٔ زبان‌ها، واژهٔ «نصف» یا «نیم» با واژهٔ «دو» ارتباطی ندارد و این، به‌معنای آن است که، در آغاز، «نیم» را برای تکه‌ای از یک واحد به‌کار می‌بردند، نه برای $\frac{۱}{۲}$ آن. اصطلاح‌های «بیشتر از نصف»، «کمتر از نصف»؛ «نیمروز» و یا ضرب‌المثل «نصف عمر شدم»، که در زبان فارسی به‌کار می‌رود، نشانه‌ای براین مطلب است. تصور دربارهٔ عددهای طبیعی، ضمن شمارش چیزها، و تصور دربارهٔ کسرها، ضمن اندازه‌گیری (محاسبهٔ طول، وزن و غیره) به‌وجود آمد. نشانه‌های رابطهٔ بین محاسبه با کسرها و دستگاه‌های اندازه‌گیری را، در بیشتر زبان‌ها می‌توان دید. قبل از عمومی شدن دستگاه متری، در ایران برای وزن، از واژه‌های خروار (۳۰۰ کیلو)، من (۳ کیلوگرم)، نیم‌من، چارک (همان چهاریک)، سی‌سنگ (به‌معنای $\frac{۱}{۲}$ چارک یا $\frac{۱}{۸}$ من)، پانزده‌سنگ (به‌معنای $\frac{۱}{۱۶}$ من) و غیره استفاده می‌کرده‌اند.

مصری‌ها و هندی‌های دوران کهن، به فراوانی از کسرهای متعارفی استفاده می‌کرده‌اند.

براهماگوپتا (که در سدهٔ هشتم میلادی می‌زیست و نسبت او به «مغ ـ برهمن»ها، دانشمندان ایرانی که در دوران پارت‌ها از سیستان به هند رفتند، می‌رسید)، عمل با کسرهای متعارفی را (با اندکی تفاوت با امروز) توضیح داده‌است. شکل امروزی نوشتن کسر هم، متعلق به هندی‌هاست، تنها خط کسری را نمی‌نوشتند و مثلاً $\frac{۲}{۵}$ را به‌صورت $\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}$ یادداشت می‌کردند. نوشتن کسرهای متعارفی و عمل با آن‌ها را، برای نخستین بار، محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی (که ملقب به «المجوسی» بود) در کتاب «حساب» خود به کاربرد و، بعدازآن، همهٔ ریاضی‌دانان ایرانی از آن پیروی کردند. لئوناردوفنیونانچی اهل پیزا، که در سدهٔ سیزدهم میلادی می‌زیست و به‌خاطر سفرهای خود در شرق، با دانش کشورهای خاورزمین آشنا شده‌بود، کسرهای متعارفی و روش عمل با آن‌ها را، برای نخستین بار، در اروپای غربی متداول کرد. کسرهای دهدهی، از ابداع‌های دانشمند بزرگ ایرانی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (سده‌های ۱۴ و ۱۵ میلادی) است که در کتاب «مفتاح‌الحساب» (رازگشای شمار) خود آورده‌است. بازرگان و دانشمند هلندی، سیمون سته‌وَن (۱۵۴۸ـ۱۶۲۰) کسرهای دهدهی را به اروپاییان شناساند.

§۵. بخشی از یک عدد

۱. پیدا کردن بخشی از یک عدد. *برای پیدا کردن بخشی از یک عدد، باید آن عدد را در کسری که معرف آن بخش است ضرب کرد.*

مثال. کارخانه‌ای ۱۲۰ کارگر دارد. برای انتخاب هیأت مدیرهٔ اتحادیهٔ کارگران این کارخانه، باید دست‌کم $\frac{۲}{۳}$ کارگران حاضر باشند. با چند نفر، جلسه رسمی می‌شود؟

حل. $۱۲۰ \times \frac{۲}{۳} = ۸۰$. دست‌کم با ۸۰ نفر.

۲. پیدا کردن عدد با در دست داشتن بخشی از آن. *وقتی بخشی از یک*

عدد معلوم باشد، *برای پیدا کردن خود عدد، باید بخش عدد را (که معلوم است) بر کسری که میزان بخش را معین می‌کند، تقسیم کنیم.*

مثال. $\frac{۴}{۵}$ گوسفندان یک گله را که ۴۲۰ رأس بودند، برای فروش، از گله جدا کردند. تمام گله، چند رأس گوسفند داشته است؟

حل. $۴۲۰ : \frac{۳}{۵} = ۷۰۰$.

۳. بیان بخشی از یک کل، به‌صورت یک کسر. *برای پیدا کردن کسری که نشان دهد، چه بخشی از کل انتخاب شده‌است، باید عدد معرف بخش را به عدد معرف کل تقسیم کرد.*

مثال. در کلاسی که ۳۰ دانش‌آموز دارد، ۴ نفر نیامده‌اند، چه بخشی از دانش‌آموزان کلاس غیبت دارند؟

حل. $\frac{۲}{۱۵} = \frac{۴}{۳۰} = ۴ : ۳۰$.

درصد

درصد، حالت خاصی است از بخشی از یک عدد. وقتی که بخش یک عدد را با کسری بیان کنیم که مخرج آن برابر ۱۰۰ باشد، آن‌وقت صورت کسر، مقدار «درصد» را بیان می‌کنید: $\frac{۲}{۵}$ یک مقدار، یعنی ۴۰درصد آن، زیرا $\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{۲ \times ۲۰}{۵ \times ۲۰} = \frac{۲}{۵}$. ۴۰درصد را به‌صورت ۴۰٪ می‌نویسند. ۱٪ یعنی $\frac{۱}{۱۰۰}$ یا ۰٫۰۱؛ ۲۷٪ یعنی ۰٫۲۷؛ ۱۰۰٪ یعنی ۱ و ۱۵۰٪ یعنی $\frac{۱۵۰}{۱۰۰}$ یا ۱٫۵.

۵٪ حق‌التألیف کتاب برای مالیات است، یعنی ۰٫۰۵ پولی که باید به نویسندهٔ کتاب داده شود، به‌عنوان مالیات از آن کم می‌شود؛ ۱۰۰٪ حقوق یک کارمند، یعنی تمام حقوق او؛ اگر کسی ۱۵۰٪ حقوق خود را بابت کرایهٔ خانه می‌دهد، یعنی ۱٫۵ برابر (یک برابر و نیم) حقوقش را باید برای کرایهٔ

خانه بپردازد.

سه مسألهٔ اساسی دربارهٔ «درصد» وجود دارد.

مسألهٔ ۱. پیدا کردن درصدِ یک عدد مفروض. عدد مفروض را در عدد «درصد» ضرب و، سپس، حاصل را بر ۱۰۰ بخش می‌کنیم:

مثال: در یک معدن زغال‌سنگ، میزان استخراج ماهیانهٔ زغال ۲۸۶۰ تُن است. ولی در ماه فروردین، به علت تعطیل نوروزی، ۸۰٪ میزان معمول ماهیانه استخراج شد. چند تن زغال‌سنگ در ماه فروردین استخراج شده‌است؟

حل.

$$۱)۲۸۶۰ \times ۸۰ = ۲۲۸۸۰۰;$$

$$۲)۲۲۸۸۰۰ : ۱۰۰ = ۲۲۸۸ \text{ (تن)}$$

مسالهٔ ۲. پیدا کردن عدد با معلوم بودن درصد معینی از آن. مقدار معلوم درصد را بر عددی که معرف میزان درصد است، تقسیم و نتیجه را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم.

مثال. ۱۵٪ چوبی که برای تهیه کاغذ وارد کارخانهٔ کاغذسازی می‌شود، به‌صورت کاغذ درمی‌آید، برای تهیهٔ ۶۰ تن کاغذ، چند تن چوب لازم است؟

حل.

$$۱)۶۰ : ۱۵ = ۴; \quad ۲)۴ \times ۱۰۰ = ۴۰۰ \text{ (تن)}$$

مسألهٔ ۳. این که یک عدد، چنددرصد عدد دیگر است. ۱۰۰برابر عدد اول را بر عدد دوم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱. در هر جعبه‌ای که ۵۰۰ لامپ دارد، ۴۸۲ لامپ سالم و بقیه معیوب‌اند. چند درصد لامپ‌ها معیوب‌اند؟

حل.

$$۱)۵۰۰ - ۴۸۲ = ۱۸;$$

$$۲)۱۸ \times ۱۰۰ = ۱۸۰۰; \quad ۳)۱۸۰۰ : ۵۰۰ = ۳/۶$$

۳/۶ درصد (۳/۶٪) از لامپ‌ها خراب‌اند.

مثال ۲. دانش‌آموزی در برنامه‌ای که برای روز بی‌کاری خود ریخته‌بود، تصمیم گرفت ۶۰ صفحه از کتاب زندگی‌نامهٔ «اواریست گالوا»، ریاضی‌دان جوان‌مرگ فرانسوی را بخواند. ولی او توانست ۷۵ صفحه از این کتاب را بخواند چنددرصد برنامهٔ خود را انجام داده‌است؟

حل.

$$۱)۷۵ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰;$$

$$۲)۷۵۰۰ : ۶۰ = ۱۲۵$$

این دانش‌آموز ۱۲۵٪ برنامهٔ خود را انجام داده‌است.

یادداشت ۱. در هرسه حالت مسالهٔ اصلی مربوط به «درصد»، می‌توان ردیف دو عمل را تغییر داد. مثلاً در مسالهٔ آخر، می‌توان اول عمل تقسیم را انجام داد و، سپس، نتیجه را در ۱۰۰ ضرب کرد.

یادداشت ۲. مثال زیر را به‌این خاطر آورده‌ایم که از اشتباه احتمالی برخی از دانش‌آموزان، جلو گرفته باشیم.

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم قیمت اولیهٔ یک متر پارچه چقدر بوده‌است، به‌شرطی که بعد از ۱۵٪ تخفیف، متری ۲۵۵۰ ریال درآمده است.

پیش آمده‌است که، برای حل این مساله، ابتدا ۱۵٪ عدد ۲۵۵۰ ریال را محاسبه کرده‌اند.

$$۲۵۵۰ \times ۰/۱۵ = ۳۸۲/۵$$

سپس، این مبلغ ۳۸۲/۵ ریال را به ۲۵۵۰ ریال اضافه کرده‌اند:

$$۲۵۵۰ + ۳۸۲/۵ = ۲۹۳۲/۵$$

و گمان کرده‌اند که قیمت پیش از تخفیف یک متر پارچه، برابر ۲۹۳۲/۵ ریال بوده‌است. ولی، این جواب درست نیست. درواقع ۳۸۲/۵ ریال، به تقریب ۱۳درصد ۲۹۳۲/۵ ریال است، نه ۱۵درصد آن.

راه‌حل درست چنین است: بعد از تخفیف، درواقع ۸۵درصد قیمت اولیه پرداخت شده‌است ($۸۵ = ۱۵ - ۱۰۰$). بنابراین ۲۵۵۰ ریال ۸۵درصد قیمت یک متر پارچه، پیش از تخفیف است:

$$۲۵۵۰ : ۰/۸۵ = ۳۰۰۰$$

هر متر پارچه، پیش از تخفیف، ۳۰۰۰ ریال قیمت داشته‌است.

یادداشت ۳. ضمن محاسبه با مساله‌های مربوط به «درصد» باید از مقدارهای تقریبی، که هم‌اکنون به آن خواهیم پرداخت، استفاده کرد.

۹§. محاسبه‌های تقریبی

در ریاضیات محاسبه‌ای، با دوگونه عدد سروکار داریم: *عددهای دقیق* و *عددهای تقریبی*. در زندگی و درعمل، اغلب، به‌جای مقدار دقیق یک عدد، از مقدار تقریبی آن استفاده می‌کنیم، زیرا همین مقدارهای تقریبی، مشکل ما را برای رسیدن به هدف خود، حل می‌کنند. به‌ویژه این‌که، در بسیاری موردها، نمی‌توانیم به مقدار دقیق یک عدد دست یابیم.

می‌گوییم، فلان کتاب ۳۲۰ صفحه دارد. این، یک عدد دقیق است.

شش‌ضلعی دارای ۹ قطر است. در این‌جا هم، ۹ یک عدد دقیق است.

شما ۱۰۰ گرم کره می‌خرید. در این‌جا عدد ۱۰۰ تقریبی است، زیرا ترازویی که با آن کره را وزن می‌کنند، نمی‌تواند ۰/۵ گرم کمتر یا بیشتر را، با دقت نشان دهد.

می‌گوییم فاصلهٔ شهر A تا شهر B، ۶۵۰ کیلومتر است. ۶۵۰، در این‌جا یک عدد تقریبی است، زیرا هم ابزارهای اندازه‌گیری دقیق نیستند و هم

نقطهٔ آغاز و نقطهٔ پایان، به تقریب انتخاب شده‌اند.

روشن است، وقتی با عددهای تقریبی عمل کنیم، نتیجهٔ عمل هم تقریبی خواهدبود. ازاین گذشته، عمل با عددهای تقریبی، می‌تواند منجر به نتیجه‌ای شود که، نه تقریبی، بلکه اشتباه باشد.

فرض کنیم، بخواهیم حاصل‌ضرب دو عدد تقریبی ۶۰/۲ و ۸۰/۱ را (که تنها تا رقم اول بعد از ممیز درنظر گرفته‌ایم)، به‌دست آوریم. ضرب این دو عدد، ما را به نتیجهٔ ۴۸۲۲/۰۲ می‌رساند، ولی این نتیجه ممکن است، نه‌تنها در رقم‌های صدم و دهم، بلکه حتی در رقم‌های درست، اشتباه باشد. اگر عددها را تا دورقم بعد از ممیز (به‌جای یک رقم) درنظر می‌گرفتیم، و اگر این عددها ۶۰/۲۵ و ۸۰/۱۴ باشند، آن‌وقت حاصل‌ضرب آن‌ها، برابر ۴۸۲۸/۴۳۵ درمی‌آید، که بیش از ۶ واحد، از حاصل‌ضرب تقریبی اول، بیشتر است.

بررسی عددهای تقریبی و آشنایی با *نظریهٔ محاسبه‌های تقریبی*، به‌ما می‌آموزد که: ۱) با آگاهی بر میزان دقت عددهای مفروض، بتوانیم میزان دقت نتیجهٔ عمل با این عددها را پیدا کنیم؛ ۲) دقت عددهای مفروض را، تاکجا و به چه‌اندازه انتخاب کنیم تا نتیجهٔ عمل با آن‌ها، همان دقتی را داشته‌باشد که لازم داریم؛ ۳) چگونه خود را از عمل‌ها یا رقم‌هایی که، در نتیجهٔ کار، تأثیری ندارند، آزاد کنیم و گرفتار عمل‌های طولانی و ملال‌آور (که درضمن، ضروری نیستند) نشویم.

روش نوشتن عددهای تقریبی

وقتی با مقدارهای تقریبی سروکار داریم، ۲/۴ با ۲/۴۰ یا ۲/۰۲ با ۰/۰۲۰۰ فرق دارد. ۲/۴ به‌این معناست که مقدار عدد ممکن است برابر ۲/۴۳ یا ۲/۳۸ باشد (که آن را در رقم اول بعد از ممیز، یعنی رقم دهم، گرد کرده‌ایم). درحالی‌که ۲/۴۰ به‌این معناست که عدد تقریبی ما، ممکن

است برابر ۲/۴۰۳ یا ۲/۳۹۸ باشد، نه ۲/۴۲۱ یا ۲/۳۸۲.

درمورد عددهای درست، وقتی می‌نویسیم ۴۷۲۰، به‌این معناست که همهٔ رقم‌های‌آن دقیق‌اند. اگربخواهیم آن‌را (به‌صورت، عددهای‌بزرگ ومثلاً در فیزیک یا اخترشناسی)، به‌صورت تقریبی بنویسیم، باید آن را به‌شکل ۴۷×۱۰^{۲} ویا، بهتر ازآن، $۴/۷ \times ۱۰^{۳}$ بنویسیم.

در عدد ۲۵۰۰، همهٔ رقم‌ها واقعی‌اند، ولی در عدد $۲/۵ \times ۱۰^{۳}$، تنها دو رقم واقعی‌اند.

همچنین، عدد تقریبی ۰/۰۰۰۰۰۲۱ را بهتر است به‌صورت

$$۲/۱ \times ۱۰^{-۶}$$

بنویسیم که به‌معنای واقعی بودن تنها دو رقم ۲ و ۱ است.

قانون گرد کردن عددها

ضمن محاسبه با عددها، گاهی لازم می‌شود آن‌ها را (چه در مورد عددهای دقیق و چه در مورد عددهای تقریبی) **گرد** کنیم، یعنی یک یا چند رقم پایانی آن را کنار بگذاریم. برای گرد کردن عددها، باید به این قاعده‌ها توجه کنیم:

قاعدهٔ ۱. اگر نخستین رقم از رقم‌هایی را که حذف می‌کنیم، بزرگتر از ۵ باشد، باید به آخرین رقمی که حذف نکرده‌ایم، یک واحد اضافه کنیم. درحالتی هم که نخستین رقم از رقم‌های حذف شده برابر ۵ باشد، ولی به‌دنبال آن (بلافاصله بعد از آن)، رقم یا رقم‌هایی وجود داشته‌باشد، بازهم به آخرین رقم حذف‌شده، یک واحد اضافه می‌کنیم.

اگر بخواهیم عدد ۲۸/۸۷۴ را در رقم اول بعد از ممیز گرد کنیم، آن را به‌صورت ۲۸/۹ می‌نویسیم (رقم اول بعد از ممیز را که ۸ بود، یک واحد اضافه می‌کنیم، زیرا بعد از آن، رقمی بزرگتر از ۵ قرار دارد). عدد ۲۸/۹ به عدد ۲۸/۸۷۴ نزدیکتر است تا عدد ۲۸/۸.

برای این‌که عدد ۳۶/۲۵۱ را در رقم اول بعد از ممیز، گرد کنیم، آن را به‌صورت ۳۶/۳ می‌نویسیم، زیرا نخستین رقم حذف‌شده ۵ است و بلافاصله به‌دنبال آن، رقم ۱ قرار دارد. عدد ۳۶/۳ به عدد ۳۶/۲۵۱ نزدیکتر است تا عدد ۳/۲.

قاعدهٔ ۲. اگر نخستین رقم از رقم‌های حذف‌شده، کوچکتر از ۵ باشد، رقم‌های باقی‌مانده را دست نمی‌زنیم

اگر بخواهیم عدد ۲۷/۴۸ را تا یک واحد تقریب گرد کنیم، آن را به‌صورت ۲۷ می‌نویسیم: ۲۷ به ۲۷/۴۸ نزدیکتر است تا ۲۸.

قاعدهٔ ۳. اگر بخواهیم با حذف رقم ۵ (وقتی که بعد از آن، رقم دیگری وجود ندارد)، عددی را گرد کنیم، می‌توان رقم ۵ را بدون تغییر در رقم قبلی حذف کرد و می‌توان، بعد از حذف آن، به رقم قبلی یک واحد اضافه کرد.

ولی از آن‌جاکه کار کردن با عددهای زوج، ساده‌تر از عمل با عددهای فرد است، بهتر است، درحالتی که رقم قبل از ۵، عددی زوج است، آن را تغییر ندهیم، ولی درحالتی که رقم پیش از ۵ فرد است، آن را، با اضافه کردن یک واحد، به رقمی زوج تبدیل کنیم.

عدد ۰/۰۴۶۵ را در رقم سوم بعد از ممیز، به‌صورت ۰/۰۴۶، و عدد ۰/۹۳۵ را در رقم دوم بعد از ممیز، به‌صورت ۰/۹۴ گرد می‌کنیم.

در این‌حالت، اضافه کردن یا اضافه نکردن یک واحد به رقم قبلی، میزان «اشتباه» را تغییر نمی‌دهد.

مثال. این عددها را، بادقت تا یک‌دهم تقریب (یعنی رقم اول بعد از ممیز) گرد کنید:

۶/۵۲۷؛ ۰/۴۵۶؛ ۲/۱۹۵؛ ۱/۴۵۰؛

۰/۹۵۰؛ ۴/۸۵۱؛ ۰/۸۵۰؛ ۰/۰۵

حل. پاسخ:

۶/۵; ۰/۵; ۲/۲; ۱/۴; ۱/۰; ۴/۹; ۰/۸; ۰/۰

خطای مطلق و خطای نسبی

به اختلاف مقدار تقریبی یک عدد با مقدار واقعی آن، **خطای مطلق** گویند. به‌زبان دیگر، اگر a مقدار تقریبی عدد x باشد، آن‌وقت $a-x$ (اگر $x < a$) یا $x - a$ (اگر $a < x$)، خطای مطلق نامیده می‌شود.

اگر کارخانه‌ای ۱۲۸۴ کارگر و کارمند داشته باشد، وقتی این تعداد را با مقدار تقریبی ۱۳۰۰ بیان کنیم، خطای مطلق برابر ۱۲۸۴ − ۱۳۰۰، یعنی ۱۶، و اگر با مقدار تقریبی ۱۲۸۰ بیان کنیم، خطای مطلق برابر ۱۲۸۰ − ۱۲۸۴، یعنی ۴ می‌شود.

خطای نسبی مقدار تقریبی، به عددی گفته می‌شود که از نسبت خطای مطلق بر خود عدد، به‌دست آید.

اگر در مدرسه‌ای ۱۹۷ دانش‌آموز تحصیل کنند و ما آن را به‌صورت تقریبی ۲۰۰ نفر بیان کنیم، خطای مطلق برابر ۳ و خطای نسبی برابر $\frac{۳}{۱۹۷}$ یا (بعد از گرد کردن) $\frac{۳}{۲۰۰}$، یعنی ۱/۵٪ خواهدبود.

پیش می‌آید که نمی‌توانیم مقدار دقیق عدد و، درنتیجه خطا را (چه خطای مطلق و چه خطای نسبی) پیدا کنیم؛ ولی همیشه می‌توانیم عددی را مشخص کنیم که مطمئن باشیم، خطای مقدار تقریبی ما از آن تجاوز نمی‌کند.

فرض کنید، فروشنده ۳/۶ کیلوگرم هندوانه به شما فروخته است. او هندوانه را با ترازو وزن می‌کند و سبک‌ترین وزنهٔ ترازوی او ۵۰ گرمی است. وزن ۳/۶ کیلوگرم یا ۳۶۰۰ گرم تقریبی است و شما از وزن دقیق هندوانه اطلاع ندارید. ولی مسلم است که خطای مطلق از ۵۰ گرم و خطای نسبی

از $\frac{۵۰}{۳۶۰۰}$، یعنی به تقریب ۱/۴٪ تجاوز نمی‌کند.

عددی را که خطای مطلق از آن تجاوز نمی‌کند (ویا در بدترین وضع، برابر آن است)، **خطای مطلق مرزی** یا **مرز خطای مطلق** می‌نامند. به‌همین ترتیب، عددی را که خطای نسبی از آن تجاوز نمی‌کند (ویا در بدترین حالت، برابر آن است)، **خطای نسبی مرزی**، یا **مرز خطای نسبی** گویند.

در مثال مربوط به خرید هندوانه، ۵۰ گرم، مرز خطای مطلق و ۱/۴٪ مرز خطای نسبی است.

برای محاسبه با عددهای تقریبی، باید مرز خطا (مطلق و نسبی) برای آن‌ها معلوم باشد. اگر این مقدار، از قبل، معین نشده‌باشد، می‌توان آن را به‌دست آورد. روشن است که مرز خطای مطلق، برابر است با نصف واحد آخرین رقم عدد تقریبی.

اگر عددی، به‌صورت تقریبی ۴/۷۸ داده شده‌باشد، مرز خطای مطلق آن، عبارت است از ۰/۰۰۵.

مرز خطای مطلق را با حرف یونانی Δ («دلتا») و مرز خطای نسبی را با حرف یونانی δ («دلتای کوچک») نشان می‌دهند. اگر مقدار تقریبی عدد را با a نشان دهیم، داریم: $\delta = \frac{\Delta}{a}$.

مثال ۱. طول مدادی را با خط‌کش میلی‌متری اندازه گرفته‌ایم، ۱۷/۹ سانتی‌متر شده‌است. مرز خطای نسبی این اندازه‌گیری چقدر است؟

حل. در این‌جا $a = ۱۷/۹$ (سانتی‌متر)؛ می‌توان $\delta = ۰/۱$ (سانتی‌متر) گرفت، زیرا اندازه‌گیری طول مداد، تا دقت ۱ میلی‌متر، مشکل نیست، ولی خطای مطلق را نمی‌توان از ۱ میلی‌متر کمتر گرفت. دراین‌صورت، خطای نسبی برابر $\frac{۰/۱}{۱۷/۹}$ می‌شود که، با گرد کردن آن، به‌دست می‌آید:

$$\delta = \frac{۰/۱}{۱۸} \approx ٪۰/۶$$

مثال ۲. پیستون استوانه‌ای، قطری برابر ۳۵ میلی‌متر دارد. با چه دقتی باید آن را اندازه گرفت تا مرز خطای نسبی برابر ۰٫۰۵٪ باشد.

حل. بنابر فرض، مرز خطای نسبی، باید ۰٫۰۵٪ از ۳۵ میلی‌متر باشد. بنابراین، مرز خطای مطلق، چنین می‌شود:

$$\frac{۳۵ \times ۰٫۰۵}{۱۰۰} = ۰٫۰۱۷۵ \quad (\text{میلی‌متر})$$

ویا، اگر آن را گرد کنیم ۰٫۰۲ میلی‌متر.

می‌توانستیم از دستور $\delta = \frac{\Delta}{a}$ استفاده کنیم:

$$a = ۳۵; \delta = ۰٫۰۰۰۵;$$
$$۰٫۰۰۰۵ = \frac{\Delta}{۳۵} \Rightarrow \Delta = ۰٫۰۱۷۵ \quad (\text{میلی‌متر})$$

بحث مربوط به محاسبه با مقدارهای تقریبی (که درعمل، کاربرد بسیار دارد)، هم جالب و هم لازم است؛ ولی در این‌جا برای طولانی نشدن مطلب و دور نشدن از برنامه درسی، از بررسی تفصیلی مطلب می‌گذریم و تنها به چند قانون اشاره می‌کنیم. ولی یادآور می‌شویم که موضوع، تنها با آوردن این چند قانون پایان نمی‌پذیرد و امیدواریم، در جلدهای بعدی کتاب، فرصتی به‌دست آید و دنبالهٔ این بحث جالب را بگیریم.

قانون ۱. برای پیدا کردن مرز خطای مطلق برای حاصل‌جمع یا تفاضل دو عدد تقریبی (در مجموع می‌تواند چند جمله وجود داشته‌باشد)، باید مرز خطای مطلق را در هریک از جمله‌های جمع یا تفریق، پیدا کرد و، سپس، آن‌ها را باهم جمع کرد.

قانون ۲. مرز خطای نسبی، در حاصل‌ضرب یا خارج‌قسمت دو عدد، برابر است با مجموع مرزهای خطای نسبی در عامل‌های ضرب یا جمله‌های تقسیم.

§۷. تناسب.

دو نسبت برابر، تشکیل یک تناسب می‌دهند.

در یک کتاب خانهٔ عمومی ۱۰۰۰۰ کتاب وجود دارد که، در بین آن‌ها، ۸۰۰۰ کتاب به زبان فارسی است. کتاب خانهٔ عمومی دیگری ۱۲۰۰۰ کتاب دارد که، از آن‌ها، ۹۶۰۰ جلد به زبان فارسی است. بنابراین، نسبت تعداد کتاب‌های فارسی، به کل کتاب‌ها، در هردو کتاب‌خانه، یکی است:

$$۸۰۰۰ : ۱۰۰۰۰ = ۹۶۰۰ : ۱۲۰۰۰ = ۰/۸$$

در این‌جا، با یک تناسب سروکار داریم که آن را این‌طور می‌نویسند:

$$۸۰۰۰ : ۱۰۰۰۰ = ۹۶۰۰ : ۱۲۰۰۰ \qquad (۱)$$

و می‌خوانند: نسبت ۸۰۰۰ به ۱۰۰۰۰، برابر است با نسبت ۹۶۰۰ به ۱۲۰۰۰. هریک از این چهار عدد یک جمله از تناسب‌اند؛ به دو عدد ۸۰۰۰ و ۱۲۰۰۰، **جمله‌های کناری** (یا طرفین) و به دو عدد ۱۰۰۰۰ و ۹۶۰۰، **جمله‌های میانی** (یا وسطین) گویند. دلیل این نام‌گذاری روشن است، جمله‌های کناری، در دوطرف و جمله‌های میانی در وسط قرار گرفته‌اند.

برابری (۱)، یعنی تناسب (۱) را، این‌طور هم می‌نویسند:

$$\frac{۸۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۹۶۰۰}{۱۲۰۰۰} \qquad (۲)$$

ویژگی اصلی تناسب.

فرض کنیم، دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ باهم برابر باشند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اگر دو طرف این برابری را در bd ضرب کنیم، به برابری

$$a \cdot d = b \cdot c$$

می‌رسیم که همان ویژگی اصلی تناسب است:

در هر تناسب، حاصل‌ضرب جمله‌های کناری، برابر است با حاصل‌ضرب جمله‌های *میانی*.

از این ویژگی می‌توان برای پیدا کردن جملهٔ مجهول یک تناسب، استفاده کرد. مثلاً، در تناسب

$$\frac{۵}{۱۲} = \frac{x}{۸۴} \qquad (۱)$$

باتوجه به ویژگی اصلی تناسب داریم:

$$۱۲x = ۵ \times ۸۴ \Rightarrow x = \frac{۵ \times ۸۴}{۱۲} = ۳۵$$

یادداشت. عادت شده‌است که در تناسبی مثل (۱)، برای پیدا کردن مجهول x، می‌گویند «طرفین وسطین می‌کنیم». این جمله، به‌جز این که معنای درستی ندارد، نوع عملی راهم که انجام می‌دهیم، مشخص نمی‌کند. اگر قرار باشد که از واژه‌های «طرفین» (به‌جای «جمله‌های کناری») و «وسطین» (به‌جای «جمله‌های میانی») استفاده کنیم، دست‌کم، جمله را به‌طور کامل بیان کنیم و بگوئیم: «حاصل‌ضرب دو جملهٔ طرفین را مساوی حاصل‌ضرب دو جملهٔ وسطین قرار می‌دهیم». بهتر از همه این است که نوع عمل ریاضی را مشخص کنیم و بگوییم: «در برابری (۱)، دوطرف را در ۸۴ × ۱۲ ضرب می‌کنیم».

کمیت‌های متناسب

مقدارهای دو کمیت متفاوت، ممکن است به یکدیگر بستگی داشته‌باشند.

مثلاً، مساحت یک مربع، بستگی به طول ضلع آن دارد و، برعکس، طول ضلع مربع، بستگی به مقدار مساحت آن دارد.

مقداری را متناسب با مقداری دیگر گویند، وقتی که نسبت آن‌ها، عددی ثابت باشد.

مثال. وزن آهن، متناسب با حجم آن است. ۲ سانتی‌متر مکعب آهن ۱۴ گرم، ۵ سانتی‌متر مکعب آن ۳۵ گرم، ۱۲ سانتی‌متر مکعب آن ۸۴ گرم و غیره وزن دارد. در این‌جا

$$\frac{۱۴}{۲} = \frac{۳۵}{۵} = \frac{۸۴}{۱۲} = \ldots = ۷$$

متناسب بودن دو کمیت، به‌معنای آن است که با n برابر شدن یکی از آن‌ها، دیگری هم nبرابر می‌شود (n، عددی گویا است). اگر حجم آهن ۳برابر شود، وزن آن هم، ۳برابر می‌شود، اگر حجم آهن نصف شود، وزن آن هم نصف می‌شود.

کمیت‌های متناسب معکوس

اگر دو کمیت چنان باشند که با n برابر شدن یکی، دیگری به $\frac{1}{n}$ خود تبدیل شود، آن‌ها را **متناسب معکوس** گویند. مثلاً، زمانی که برای رسیدن اتومبیل از شهر A به‌شهر B لازم است، با سرعت اتومبیل متناسب معکوس است، یعنی نسبت **عکس** دارد، به‌زبان دیگر، اگر سرعت اتومبیل دوبرابر شود، زمان رسیدن از A به B نصف می‌شود و اگر سرعت اتومبیل نصف شود، زمان رسیدن از A به B، دوبرابر می‌شود.

اگر دو کمیت، در بستگی باهم، متناسب معکوس باشند، آن‌وقت نسبت دو مقدار از کمیت اول، وقتی با نسبت دو مقدار متناظر از کمیت دوم، یک تناسب تشکیل می‌دهند که عکس یکی از نسبت‌ها را با نسبت دوم برابر قرار دهیم.

اگر اتومبیلی با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت، فاصلهٔ دو شهر را در ۵ ساعت طی کند، باچه سرعتی همین فاصله را در ۳ ساعت طی خواهد کرد؟

در این‌جا،زمان و سرعت، متناسب معکوس‌اند. اگر سرعت مجهول را x فرض کنیم، نسبت سرعت‌ها برابر $\frac{۶۰}{x}$ و نسبت زمان‌ها برابر $\frac{۵}{۳}$ می‌شود؛ ولی دو کمیت، متناسب معکوس‌اند، پس باید یکی از این نسبت‌ها را با عکس دیگری، برابر قرار دهیم، تا یک تناسب به‌دست آید:

$$\frac{۶۰}{x} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۱۰۰$$

ویژگی‌های دیگر کمیت‌های متناسب

تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را درنظر می‌گیریم. بنابر ویژگی اصلی تناسب داشتیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

باتوجه به همین نتیجه‌گیری (یعنی این‌که، از برابری سمت چپ می‌توان برابری سمت راست را نتیجه گرفت و، برعکس، از برابر سمت راست، برابری سمت چپ را)، می‌توان ویژگی‌های دیگری، برای تناسب پیدا کرد:

۱) در هر تناسب، می‌توان نسبت‌ها را وارونه کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad (۱)$$

۲) در هر تناسب، نسبت صورت‌ها، با نسبت مخرج‌ها برابر است، یعنی یک تناسب تشکیل می‌دهند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad (۲)$$

۳) روشن است، اگر یک واحد، به دوطرف برابری اضافه کنیم، درستی برابری به هم نمی‌خورد:

$$\frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱ \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (۳)$$

این عمل را، **ترکیب نسبت‌ها در صورت**، گویند. می‌توان ترکیب نسبت‌ها را در مخرج انجام داد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \qquad (۳)'$$

۴) اگر از دوطرف برابری $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، یک واحد کم کنیم، بازهم به تناسب جدیدی می‌رسیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad (۴)$$

این عمل را، **تفصیل نسبت‌ها در صورت**، گویند. تفصیل نسبت‌ها را می‌توان در مخرج انجام داد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d} \qquad (۴)'$$

۵) ترکیب و تفضیل نسبت‌ها، می‌تواند باهم انجام بگیرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \qquad (۵)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d} \qquad (۵)'$$

در (۵)، ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج انجام گرفته‌است و در $(۵)'$ برعکس.

۶) مقدار هریک از نسبت‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را برابر m می‌گیریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$$

از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$a = mb; c = md$$

از مجموع این دوبرابری نتیجه می‌شود:

$$a + c = (b + d)m \Rightarrow m = \frac{a + b}{c + d}$$

به‌این ترتیب، بافرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d + d} \qquad (۶)$$

ویژگی (۶) را می‌توان عام‌تر کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{na + qc}{nb + qd} \qquad (۶)'$$

(خودتان، درستی آن را ثابت کنید).

ویژگی (۶) یا $'$(۶)، برای برابری چند نسبت هم درست است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots} \quad (۶)''$$

۷) اگر در یک تناسب، دو جملهٔ میانی یا دوجملهٔ کناری باهم برابر باشند:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ یا } \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

بنابر ویژگی اصلی تناسب، به برابری

$$x^{۲} = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

می‌رسیم که، دراین‌صورت، x را واسطهٔ هندسی یا میانگین هندسی دو عدد a و b گویند. ۴ میانگین هندسی دو عدد ۲ و ۸؛ یا ۱۰ میانگین هندسی دو عدد ۵ و ۲۰ است، زیرا

$$۴^{۲} = ۲ \times ۸ \text{ و } ۱۰^{۲} = ۵ \times ۲۰$$

□

*مفهوم «درصد» بستگی نزدیکی با مفهوم نسبت دارد و نیازهای زندگی و عمل، آن را پدید آورده‌است. به احتمال زیاد، نخستین کسانی که از واژهٔ «درصد» استفاده کرده‌اند، رباخواران و صراف‌ها، یعنی «پدربزرگان» بانک‌های بوده‌اند ولی در زمان ما، به‌جز بانک‌ها (که برای محاسبهٔ بهرهٔ پولی که به وام می‌دهند، از واژه «درصد» استفاده می‌کنند)، مفهوم «درصد» در تمامی زندگی اقتصادی ریشه دوانده است. تنها بانک‌ها نیستند که میزان «درصد» سود خود را محاسبه می‌کنند، بلکه به‌طور کلی، در هر کار اقتصادی (به‌ویژه در جهان سرمایه‌داری)، باید این سه مسأله را درنظر داشت:

۱. تعیین «درصد» سوددهی سرمایه‌ای که به‌کار افتاده است؛

۲. تعیین سرمایه، بعد از مدتی که با «درصد» معینی سود کار کرده‌است؛

۳. تعیین «درصد»، برای این که سرمایه‌ای را در طول مدت معینی، به مقدار معلومی برساند.

به‌جز این، از مفهوم «درصد»، در تعیین رشد اقتصادی، رشد جمعیّت و بر پایهٔ آن، طرح برنامه‌های لازم برای توسعهٔ اقتصادی و کنترل جمعیت استفاده می‌شود ... باید گفت که، در روزگار ما، در هرگام، به مفهوم «درصد» نیاز داریم.

برای درصد از نماد ٪ استفاده می‌شود که، درواقع، تحریفی از نماد ۱۰۰ است (عدد ۱ را کج کرده‌اند و صفرها را به دوطرف آن، کمی بالا و کمی پایین آورده‌اند).

ولی مفهوم‌های «نسبت» و «تناسب»، عمری درازتر دارند.

مفهوم تناسب، به‌معنای برابری دو نسبت از عددهای طبیعی، از زمانی بسیار کهن به‌کار می‌رفته است.در سرزمین‌های عیلام و بابل هزاران سال پیش از میلاد، با شناختن مثلث‌های متشابه، به مفهوم «ضلع‌های متناسب» (البته، برای عددهای طبیعی) رسیده بودند.

فیثاغورث (نزدیک سال‌های ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش از میلاد)، دانشمند یونان باستان و هواداران او، برای نخستین بار، نظریهٔ ریاضی نسبت‌ها را مطرح کردند. آن‌ها، سه گونه تناسب را، برای عددهای طبیعی a، b، c و d، مورد بررسی قرار دادند:

تناسب حسابی: $a - b = c - d$؛

تناسب هندسی: $a : b = c : d$؛

تناسب توافقی: $\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b} = \frac{۱}{c} - \frac{۱}{d}$.

مفهوم «میانگین» (میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین توافقی) هم متعلق به فیثاغوریان و مربوط به حالتی است که دو جملهٔ میانی تناسب، با هم برابر باشند.

در سدهٔ چهارم پیش از میلاد، «اودوکس» (نزدیک به سال‌های ۴۰۸ تا ۳۵۵ پیش از میلاد)، دانشمند یونانی، بررسی منطقی را دربارهٔ ویژگی‌های تناسب (نه‌فقط تناسب‌های با عددهای طبیعی، بلکه در ضمن با عددهای کسری مثبت) انجام داد. اودوکس، دانشمندی بود که به همهٔ دانش‌های زمان خود، تسلط داشت. او اخترشناس و ریاضی‌دان بود، دانش «مکانیک» را پیش برد و، درضمن، پزشکی معتبر بود.

تنظیم دقیق نظریهٔ تناسب‌ها، به‌وسیلهٔ اقلیدس، هندسه‌دان یونانی، در

کتاب مشهور او به‌نام «مقدمات» (که شامل ۱۳ بخش بود) و در سدهٔ سوم پیش از میلاد، انجام گرفت. او، این نظریه را، در بخش پنجم کتاب خود، و در اساس، بر پایهٔ آموزش‌های اودوکس، آورده‌است. نظریهٔ امروزی نسبت‌ها، که در کتاب‌های درسی آمده است، با نظریه اقلیدس ـ اودوکس، خیلی کم اختلاف دارد. اقلیدس، تناسب هندسی را، این‌طور تعریف کرده‌است (مضمون سخن اقلیدس، به زبان امروزی):

«چهار عدد a، b، c و d، تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را تعریف می‌کنند، به‌شرطی که، برای عددهای طبیعی ولی دلخواه m و n: اگر $ma > nb$، آن‌وقت $mc > nd$؛ اگر $ma = nb$، آن‌وقت $mc = nd$؛ و سرانجام، اگر $ma < nb$، آن‌وقت $mc < nd$».

تمرین‌ها

۱۲۱. آیا عمل ساده‌کردن کسر تمام شده‌است:

$$۱)\ \frac{۱۰۲۰}{۱۸۷۰}=\frac{۱۰۲}{۱۸۷};$$

$$۲)\ \frac{۳۱۲}{۵۴۶}=\frac{۱۵۶}{۲۷۳}=\frac{۵۲}{۹۱}$$

۱۲۲. آیا برای انجام این عمل‌ها، ساده‌ترین راه انتخاب شده‌است:

$$۱)\ ۷۸\frac{۵}{۶}+۲۴\frac{۳}{۴}=\frac{۴۷۳}{۶}+\frac{۹۹}{۴}=$$
$$=\frac{۹۴۶+۲۹۷}{۱۲}=\frac{۱۲۴۳}{۱۲}=۱۰۳\frac{۷}{۱۲};$$

$$۲)\ ۹۷\frac{۵}{۶}-۳۲\frac{۷}{۹}=\frac{۵۸۷}{۶}-\frac{۲۹۵}{۹}=$$
$$=\frac{۱۷۶۱-۵۹۰}{۱۸}=\frac{۱۱۷۱}{۱۸}=۶۵\frac{۱}{۱۸};$$

$$۳)\ ۵\frac{۱۷}{۲۴} \times ۳ = \frac{۱۳۷}{۲۴} \times ۳ = \frac{۱۳۷ \times ۳}{۲۴} =$$

$$= \frac{۱۳۷}{۸} = ۱۷\frac{۱}{۸};$$

$$۴)\ ۱۸\frac{۳}{۵} : ۲ = \frac{۹۳}{۵} : ۲ = \frac{۹۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} =$$

$$= \frac{۹۳}{۱۰} = ۹\frac{۳}{۱۰};$$

$$۵)\ \frac{۵}{۱۸} + \frac{۱۱}{۲۴} = \frac{۵ \times ۲۴ + ۱۱ \times ۱۸}{۱۸ \times ۲۴} =$$

$$= \frac{۳۱۸}{۴۳۲} = \frac{۵۳}{۷۲};$$

$$۶)\ ۱۷\frac{۵}{۱۴} \times ۲\frac{۲}{۲۷} = \frac{۲۴۳}{۱۴} \times \frac{۵۶}{۲۷} =$$

$$= \frac{۱۳۶۰۸}{۳۷۸} = ۳۶$$

۱۲۳. ۱۵ عدد پیدا کنید که از $\frac{۱}{۳}$ بزرگتر و از $\frac{۱}{۲}$ کوچکتر باشند (یعنی هر ۱۵ عدد بین دو عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ واقع باشند).

۱۲۴. از دوعدد مثبت a و $\frac{۱}{a}$، کدام بزرگترند؟ اگر a بتواند عددی منفی هم باشد، چطور؟

۱۲۵. از دوکسری که صورت‌های برابر دارند (مثل $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۸}$)، کدام بزرگترند؟ چرا؟

۱۲۶. از این کسرها، کدام بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ و کدام کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ هستند؟

$$\frac{۳}{۵}; \frac{۳}{۷}; \frac{۴}{۷}; \frac{۴}{۹}; \frac{۵}{۹}; \frac{۵}{۱۲}; \frac{۷}{۱۲}; \frac{۱۳}{۲۴}$$

۱۲۷. بدون این‌که به یک مخرج تبدیل کنید، بگویید، کدام بزرگترند؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ یا $\frac{۱۷}{۱۸}$؛ ۲) $\frac{۷}{۸}$ یا $\frac{۵}{۶}$؛ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ یا $\frac{۳}{۸}$؛ ۴) $\frac{۳}{۸}$ یا $\frac{۵}{۱۲}$؛ ۵) $\frac{۱۰۳}{۹۷}$ یا $\frac{۹۷}{۹۱}$؟

۱۲۸. مطلوب است: $\frac{۷}{۸}$ عددِ ۱۶۸؛ $\frac{۳}{۵}$ عدد $\frac{۲۰}{۲۷}$؛ $\frac{۵}{۱۲}$ عددِ $۲\frac{۲۲}{۲۵}$؛ $\frac{۱}{۲}$ از عددِ $\frac{۱}{۱۲}$.

۱۲۹. مطلوب است عددی که: ۱) $\frac{۱۳}{۱۵}$ آن برابر ۱۹۵ است؛ ۲) $\frac{۱۷}{۲۳}$ آن برابر ۵۱ است، ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ آن برابر $۴\frac{۱}{۶}$ است.

۱۳۰. ۱۸۰ نفر را، که $\frac{۶}{۲۳}$ داوطلبان بودند، به آموزشگاه عالی پذیرفتند، تعداد داوطلبان را پیدا کنید.

۱۳۱. قطار مسافری فاصلهٔ بین دو شهر را در $۲\frac{۴}{۵}$ ساعت و قطار باری در $۴\frac{۲}{۳}$ ساعت می‌پیماید. سرعت قطار مسافری ۲۶ کیلومتر درساعت از سرعت قطار باری بیشتر است. فاصلهٔ بین دوشهر چند کیلومتر است؟

۱۳۲. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱)\ \frac{\left(۲۴\frac{۴}{۹} : ۸ - ۱۵ : ۷\frac{۱}{۵}\right) \times ۷ - ۱\frac{۱}{۴}}{۴ - \left(۱\frac{۸}{۶۳} + \frac{۳۵}{۵۴} + ۱\frac{۲۵}{۴۲}\right) : ۱\frac{۱}{۸}}$$

$$۲)\ \frac{۶ - \left(۳۷\frac{۱}{۵} : ۱۸ - ۵ : ۳\frac{۴}{۷}\right) \times ۳}{۶\frac{۳}{۱۰} \times \left(\frac{۲۹}{۳۰} + \frac{۱۴}{۴۵} + \frac{۴۷}{۵۴}\right) - ۱۳};$$

$$۳)\ \frac{\left[\left(\frac{۲۳}{۳۶}+\frac{۳۱}{۶۳}\right)-\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۲۱}\right)\right]\times ۴۸:\left(\frac{۳}{۵}:\frac{۷}{۸}\right)}{\left(\frac{۱۹}{۲۶}+\frac{۱۴}{۳۹}-\frac{۱}{۶}\right)\times ۵۴\frac{۱}{۶}:\left(۸\frac{۴}{۷}:\frac{۱۲}{۳۵}\right)}$$

۱۳۳. الف) یک عدد دهدهی (اعشاری) را چگونه در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و غیره ضرب کنیم؟ ب) در تقسیم براین عددها چه باید کرد؟

۱۳۴. این کسرهای متعارفی را؛ بدون استفاده از عمل تقسیم صورت بر مخرج، به کسر دهدهی تبدیل کنید:

$$\frac{۵}{۸};\frac{۱۹}{۲۵};\frac{۳}{۴۰};\frac{۶}{۱۲۵};\frac{۱۵۱}{۳۲۰};\frac{۳۱۲}{۶۲۵}$$

۱۳۵. عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱)\ ۱:\frac{۰/۱-۰/۰۹}{۰/۶-۰/۵۸};$$

$$۲)\ ۰/۱+۰/۵\times\frac{۲/۴-۰/۹:(۱-۰/۴)}{(۲-۱/۶۴):۰/۹+۰/۱};$$

$$۳)\ \left(۲/۳۱۴-\frac{۱}{۴}\right):۰/۰۲+\left(۳\frac{۳}{۸}+۱/۴۲۵\right):۶$$

۱۳۶. ۱۰۰۰ کیلوگرم خیار را که ۹۷٪ آب دارد، اندکی خشک کردیم، میزان آب به ۹۶٪ تقلیل پیدا کرد. حالا وزن خیارها چقدر است؟

۱۳۷. دو کارگر، یکی بلند و دیگری کوتاه، دریک لحظه از محل مشترک زندگی خود، به‌طرف کارخانه حرکت می‌کنند. طول هرگام کارگر کوتاه ۲۰٪ از طول هرگام کارگر بلند کمتر است، درعوض در هر فاصلهٔ زمانی، ۲۰٪ بیشتر از رفیق خود گام برمی‌دارد. کدام زودتر به کارخانه می‌رسند؟

۱۳۸. زغال‌سنگ، در لحظهٔ استخراج ۲٪ آب دارد، ولی وقتی دو شبانه‌روز در هوای آزاد بماند، میزان آب آن ۱۲٪ می‌شود. به هر ۱۰۰ کیلوگرم زغال‌سنگ استخراج‌شده،بعد از دو شبانه‌روز، چه وزنی اضافه می‌شود؟

۱۳۹. وقتی آب، یخ ببندد، ۹٪ به حجم آن اضافه می‌شود. وقتی یک قطعه یخ آب شود، چنددرصد از حجم آن کاسته می‌شود؟

۱۴۰. قیمت هر جلد چاپ دوم یک کتاب ۱۲۰٪ چاپ اول آن بود، ولی چاپ سوم کتاب، نسبت به قیمت چاپ دوم، ۲۰٪ ارزان‌تر بود، کدام ارزان‌ترند، چاپ اول یا چاپ سوم کتاب؟

۱۴۱. با ابتکار مهندس A، ۷۰٪ مصرف سوخت یک واحد تولیدی کاهش یافت و، سپس، با ابتکار مهندس B، دوباره ۳۰٪ از مصرف سوخت کاسته شد. در مصرف سوخت این واحد تولیدی، چنددرصد صرفه‌جویی شده‌است؟

۱۴۲. در یک قطار مسافری، ۷۰٪ مسافرها ایرانی و، درضمن ۷۰٪ مسافرها، مردند. آیا می‌توان نتیجه گرفت اکثریت مسافران قطار، مردان ایرانی‌اند؟

۱۴۳. ببینید، چنددرصد را تشکیل می‌دهد:

۱) ۲۵ از ۳۷۵؛ ۲) $۸\frac{۳}{۴}$ از ۲۵۰؛ ۳) $\frac{۳}{۸}$ از $\frac{۵}{۷}$؛ ۴) ۰/۰۷ از ۲/۵؟

۱۴۴. جمعیت شهری ۵۵۰۰۰ نفر است و می‌دانیم، درطول ۱۰ سال، ۱۰٪ به جمعیت شهر افزوده می‌شود. ده سال قبل، جمعیت این شهر چند نفر بوده‌است؟

۱۴۵. عدد p را به سه بخش طوری تقسیم کنید که نسبت آن‌ها، برابر ۷ : ۳ : ۲ باشد.

۱۴۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌دانیم:

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \text{ و } \hat{C} = ۳۰^\circ$$

از رأس A، ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. این سه پاره‌خط راست، زاویهٔ قائمه را به چه نسبت‌هایی تقسیم می‌کنند؟

۱۴۷. پیاده‌ای روی هم پنج روز پیاده‌روی کرده‌است و می‌دانیم مسافتی را که در این روزها پیموده‌است، به‌نسبت ۲ : ۳ : ۴ : ۶ : ۲ بوده‌است. اگر در دوروز آخر، روی‌هم ۴۵ کیلومتر پیاده‌روی کرده‌باشد، در پنج روز چند کیلومتر طی کرده‌است؟

۱۴۸. دو ظرف داریم، یکی خالی و دیگری پراز آب. اگر همهٔ آب ظرف دوم را در ظرف خالی بریزیم، $\frac{۱}{۵}$ آن بدون آب می‌ماند. نسبت حجم‌های دو ظرف را پیدا کنید.

۱۴۹. سه ظرف داریم، اولی پراز آب و دوتای دیگر خالی. اگر ظرف اول را در ظرف دوم خالی کنیم، $\frac{۱}{۵}$ ظرف دوم بدون آب می‌ماند؛ ولی اگر از ظرف اول در ظرف سوم بریزیم، ظرف سوم پر می‌شود و به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ آب ظرف اول، در ظرف اول باقی می‌ماند. حجم‌های سه ظرف به چه نسبت‌هایی هستند؟

۱۵۰. ۹۲٪ یک خربزه آب است. ۲، ۳، یا ۱۰۰ خربزه، چنددرصد آب دارند؟

۱۵۱. مجموع دو عدد برابر است با ۱۲۰. این عددها را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم ۴۰٪ یکی برابر است با ۶۰٪ دیگری.

۱۵۲. عددی برابر ۵۰٪ عدد دوم است. چنددرصد عدد اول، برابر عدد دوم می‌شود؟

۱۵۳. مساحت مربع از روی ضلع آن تعیین می‌شود. آیا ضلع مربع با مساحت آن متناسب است؟

۱۵۴. ضلع مربعی را ۲۰٪ بزرگ کرده‌ایم. مساحت مربع، چنددرصد بزرگ می‌شود؟

۱۵۵. عدد اول ۲۵٪ از عدد دوم بزرگتر است. عدد دوم چنددرصد، از عدد اول کوچکتر است؟

۱۵۶. پیاده‌ای، فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B را در $۵\frac{۱}{۴}$ ساعت طی کرد. ابتدا در جاده شوسه و بعد در مسیر بدون جاده. نسبت زمانی که در جادهٔ شوسه صرف کرده، به زمانی در مسیر بدون جاده بوده، برابر است با نسبت $۱/۶ : ۲\frac{۲}{۱۵}$. سرعت این شخص در جادهٔ شوسه چقدر بوده‌است، به‌شرطی‌که بدانیم مسیر بدون جاده را با سرعت ۳/۶ کیلومتر درساعت طی کرده و طول مسیر بدون جاده، برابر ۳۷/۵٪ تمامی راه بوده‌است؟

۱۵۷. مقدار x را پیدا کنید:

$$۱)\ \frac{۵+x}{۲+x}=\frac{۴}{۳};$$

$$۲)\ \frac{۹+x}{x}=۴; \quad ۳)\ \frac{۱۰-x}{x}=۴;$$

$$۴)\ \frac{a+x}{x}=a+۱; \quad ۵)\ \frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}$$

۱۵۸. x و y را پیدا کنید.

$$۱)\ x:y=۲:۳ \text{ و } x+y=۱۰;$$

$$۲)\ \frac{x}{۵}=\frac{y}{۳} \text{ و } x-y=۶;$$

$$۳)\ \frac{x}{y}=\frac{۲a}{b} \text{ و } x+y=a+b;$$

$$۴)\ \frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b} \text{ و } x-y=۲a$$

۱۵۹. می‌دانیم $\frac{am-bn}{am+bn}=\frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{m}{n}=\frac{۳}{۲}$. مقدار نسبت $\frac{a}{b}$ را پیدا کنید.

۱۶۰. می‌دانیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. ثابت کنید:

۱) $\frac{am}{bn} = \frac{cp}{dq}$، یعنی از ضرب جمله به جملهٔ دو تناسب، یک تناسب جدید تشکیل می‌شود

۲) $\frac{an}{bm} = \frac{cq}{dp}$، یعنی اگر دو تناسب را جمله به جمله برهم تقسیم کنیم، خارج‌قسمت‌ها، یک تناسب تشکیل می‌دهند.

۱۶۱. می‌دانیم $\frac{۲}{۳} = \frac{x}{y}$ و $\frac{۶}{۵} = \frac{y}{z}$. مطلوب است مقدار $\frac{z}{x}$.

۱۶۲. می‌دانیم $\frac{۱}{۲} = \frac{a}{b}$ و $\frac{۱}{۳} = \frac{a_۱}{b_۱}$. مقدار هریک از نسبت‌های $aa_۱$ به $bb_۱$ و $\frac{a}{a_۱}$ به $\frac{b}{b_۱}$ را پیدا کنید.

۱۶۳. عدد ۳۸۴۰ را به‌نسبت عکس عددهای ۷ و ۸ تقسیم کنید.

*۱۶۴. در مساله‌های عملی، توصیه می‌کنند که می‌توان حجم مخروط یا هرم ناقص را، به تقریب، از روی دستور

$$V = \frac{S_۱ + S_۲}{۲} \cdot h \qquad (۱)$$

به‌دست آورد دراین دستور، $S_۱$ و $S_۲$ مقدار مساحت‌های دو قاعده و h مقدار ارتفاع مخروط یا هرم ناقص است.

دستور تقریبی (۱)، در چه موردهایی، خطای محاسبه را بالا می‌برد و نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد؟

۱۶۵. به کسر دهدهی تبدیل کنید:

$$\frac{۲}{۵};\ ۱\frac{۱}{۴};\ \frac{۷۴}{۲۵};\ \frac{۸}{۹};\ \frac{۲}{۱۱};$$

$$\frac{۱}{۷};\ \frac{۴}{۷};\ \frac{۱}{۱۳};\ \frac{۵}{۱۳};\ \frac{۷}{۱۵};\ \frac{۱}{۱۲}$$

۱۶۶. به کسر متعارفی تبدیل کنید:

$$۰/۱۲۵;\ ۱/۴۸۴;\ ۰/(۳۹);\ ۱/(۷۸۳);\ ۰/(۱۸۵);\ ۰/۲(۷);$$

$$۴/۳(۲۷);\ ۰/۱۵(۳);\ ۰/(۹);\ ۰/۲(۹)$$

*۱۶۷. کسر $\frac{1}{p}$ (p، عددی است اول)، ضمن تبدیل به کسر دوره‌ای دهدهی و در دورهٔ گردش خود، حداکثر چند رقم می‌تواند داشته‌باشد؟

*۱۶۸. برای تبدیل کسر دوره‌ای دهدهی (ساده یا مرکب) به کسر متعارفی از قاعده‌هایی استفاده می‌کنید. این قاعده‌ها را ثابت کنید.

۶. مجموعهٔ عددهای حقیقی

§۱. اندکی تاریخ

فیثاغورث، ریاضی‌دان یونانی که پیش از میلاد مسیح زندگی می‌کرد و، همچنین هواداران او، برای عدد اهمیتی خاص قائل بودند. آن‌ها، اعتقاد داشتند نه‌تنها طول و سطح و حجم و وزن و زمان را می‌توان به‌یاری عدد مشخص کرد، بلکه پیامدهای بغرنج‌تری از نوع نواهای موسیقی، غم و شادی، آرامش و التهاب و . . . هم با عدد قابل بیان‌اند. به‌این ترتیب، آن‌ها، عدد را سرچشمهٔ شناخت همهٔ پدیده‌های مادی و معنوی می‌دانستند و می‌گفتند «چیزی در جهان وجود ندارد که به‌کمک عدد، قابل‌بیان نباشد».

افلاطون که یکی از هواداران فلسفهٔ فیثاغورث بود، در کتاب «جمهور» خود، معتقد به «اعجاز» عدد است و گمان می‌کند، به‌کمک عدد، می‌توان زندگی و پیش‌آمدهای آینده را پیش‌بینی کرد.

البته، در سرزمین عیلام و بابل هم، قرن‌ها پیش از دورهٔ زرین یونان باستان، اعتقادهای نادرستی دربارهٔ عدد داشتند و، مثلاً هریک از خدایان مورد پرستش خود را، با عددی مشخص می‌کردند و، بسیار احتمال دارد که فیثاغورث، دیدگاه‌های فلسفی خود را از آن‌ها گرفته باشد. همین اعتقادهای نادرست را، باید سرچشمهٔ بسیاری از دیدگاه‌های خرافی بشر نسبت‌به عدد دانست که مثلاً «هفت» عددی مقدس ویا «سیزده» عددی نحس است.

از طرف دیگر، ریاضی‌دانان یونان باستان، عدد را به‌معنای نسبت دو عدد طبیعی می‌شناختند و، اغلب، گمان می‌کردند، هر عدی را می‌توان به‌وسیلهٔ نسبت دو عدد طبیعی نشان داد.

خود فیثاغورث، یا یکی از هواداران او، قضیه‌ای از هندسه را که هنوز معروف به «قضیه فیثاغورث» است ـ کشف کرد. بنابراین قضیه، اگر ضلع‌های

پهلوی زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه را، با طول‌های a و b، و وتر آن را با طول c فرض کنیم، همیشه داریم:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

البته، ریاضی‌دانان عیلامی و بابلی و مصری، ده‌ها سده پیش از ریاضی‌دانان یونانی، از حالت‌های خاص این قضیه آگاه بودند و، مثلاً می‌دانستند، مثلث با ضلع‌های به‌طول ۳ و ۴ و ۵، یک مثلث قائم‌الزاویه است. هنوز هم، در بسیاری کتاب‌ها، این مثلث را «مثلث مصری» می‌نامند. ولی در یونان، قضیه را در حالت کلی خود ثابت کردند. این مطلب را هم یادآوری کنیم، اگر طول ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، با عددهای درست (و البته مثبت) بیان شده‌باشد، آن را «مثلث فیثاغوری» می‌نامند. مثلاً مثلث مصری، یا مثلث با ضلع‌های به‌طول ۵ و ۱۲ و ۱۳ یا ۷ و ۲۴ و ۲۵، مثلث‌های فیثاغوری هستند، زیرا

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲; ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲;$$
$$۷^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲$$

ولی هواداران فیثاغورث، که گمان می‌کردند، پدیده‌های معنوی را هم، می‌توان به‌یاری عدد توضیح داد، از بیان طول قطر مربعی که طول ضلع آن، برابر واحد باشد، درماندند.

مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی را درنظر بگیریم که طول هر ضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آن برابر ۱ باشد. هواداران فلسفهٔ فیثاغورث، نتوانستند، دوعدد طبیعی پیدا کنند که نسبت آن‌ها، برابر با طول وتر این مثلث باشد: نسبت دو عدد طبیعی ۷ و ۵، یعنی $\frac{۷}{۵}$، یا ۱/۴، به تقریب، برابر طول این وتر است. ولی از آن کمتر است؛ نسبت دو عدد ۳ و ۲، یعنی $\frac{۳}{۲}$ یا ۱/۵،

بازهم به‌تقریب، برابر طول وتر، ولی از آن بیشتر است. $\frac{۱۴۱}{۱۰۰}$ یا ۱/۴۱ از طول وتر کمتر و $\frac{۷۱}{۵۰}$ یا ۱/۴۲ از طول وتر بیشتر است. همچنین ۱/۴۱۴ از طول وتر کمتر و ۱/۴۱۵ از طول وتر بیشتر است. درواقع، باید مجذور طول وتر برابر ۲ شود؛ ولی

$$۱/۴^۲ = ۱/۹۶ < ۲; ۱/۵^۲ = ۲/۲۵ > ۲;$$

$$۱/۴۱^۲ = ۱/۹۸۸۱ < ۲; ۱/۴۲^۲ = ۲/۰۱۶۴ > ۲;$$

$$۱/۴۱۴^۲ = ۱/۹۹۹۳۹۶ < ۲; ۱/۴۱۵^۲ - ۲/۰۰۲۲۲۵ > ۲$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهدهی نمی‌رسیم که، مجذور آن، برابر ۲ باشد. [البته، هواداران فیثاغورث و دیگر ریاضی‌دانان یونانی، عددهای دهدهی را نمی‌شناختند؛ آن‌ها تنها با کسرها، یعنی نسبت عددهای طبیعی کار می‌کردند، ولی ما برای سادگی کار از کسرهای دهدهی استفاده کردیم.]

این رویداد، برای فلسفهٔ فیثاغورث، مسالهٔ زندگی و مرگ بود: وقتی نتوان، یک پاره‌خط راست ساده را، با عدد بیان کرد، چگونه می‌توان ادعا کرد، اندوه و ترس و شادی و دلیری، با عدد قابل توضیح‌اند.

انجمن‌های هوادار فلسفهٔ فیثاغورث، انجمن‌هایی پنهانی بودند، آن‌ها بین خود، پدیده‌ها را به دوگونه بخش کردند. اول آن‌ها که با عدد (یعنی نسبت دو عدد طبیعی) قابل بیان هستند؛ این پدیده‌ها را گویا (یا مُنطق) نامیدند. دوم آن‌هایی که با عدد غیرقابل بیان هستند که نام گنگ (یا اصم) را به آن‌ها دادند. بنابراین

طول قطر مربع به ضلع واحد، گنگ است، یعنی (به اعتقاد هواداران فیثاغورث)، به‌کمک عدد (یا دقیق‌تر، نسبت دوعدد درست) قابل‌بیان نیست.

هواداران فیثاغورث، از هندسه هم، برای نجات فلسفهٔ خود یاری گرفتند، ولی در آن‌جا هم به نتیجه‌ای نرسیدند: اگر طول ضلع مربعی را واحد فرض

کنیم، نمی‌توان طول قطر این مربع را (به‌کمک طول ضلع آن) اندازه گرفت. به‌همین مناسبت، در هندسه، این‌گونه پاره‌خط‌های راست را، **اندازه‌ناپذیر**، خواندند.

هواداران فیثاغورث، این راز را از دیگران پنهان می‌کردند، ولی سرانجام، مثل هر مورد مشابه خود، این راز هم از پرده بیرون افتاد و، باوجودی که فاش‌کنندهٔ آن را کشتند (در آب غرق کردند)، فلسفهٔ ذهنی و غیرواقعی آن‌ها، نتوانست جان سالم به‌در برد.

«نظریهٔ نسبت‌ها» و «نظریهٔ اندازه‌ناپذیرها»، در تمام دوران ریاضیات یونانی و، سپس، در بین ریاضی‌دانان ایرانی، موردبحث بود و، سرانجام، همین‌ها، یعنی ریاضی‌دانان ایرانی، مثل کرجی و خیام و توسی و جمشید کاشانی، تاحد زیادی آن را حل کردند.

§۲. عددهای گنگ

می‌دانیم، نسبت دو عدد درست، همیشه قابل‌تبدیل به کسر دهدهی است؛ البته، این کسر دهدهی ممکن است تحقیقی یا دوره‌ای (ساده یا مرکب) باشد. ولی می‌توان کسر دهدهی را طوری نوشت که نه تحقیقی باشد، نه دوره‌ای. مثلاً کسر دهدهی را به‌این‌ترتیب می‌سازیم که، بعد از ممیز، پشت‌سرهم، عددهای فرد نوشته شده‌باشد:

$$۰/۱۳۵۷۹۱۱۱۳۱۵۱۷۱۹۲۱۲۳...$$

این کسر دهدهی، بی‌پایان است و می‌توان ثابت کرد که، دورهٔ گردشی ندارد. بنابراین، نمی‌توان آن را به‌صورت کسر متعارفی، یعنی نسبت دو عدد درست، درآورد. چنین عددی را **گنگ** گویند.

هر عددی که قابل‌تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ است.

طول قطر مربعی که طول ضلع آن، برابر ۱ باشد، برابر است با $\sqrt{۲}$، و $\sqrt{۲}$ عددی است گنگ.

اگر a عددی درست باشد؛ درضمن، مجذور یک عدد درست نباشد، آن‌وقت، عدد $\sqrt{a}$، عددی گنگ است.

به‌عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم $\sqrt{۷}$، عددی گنگ است، یعنی به‌فرض درست بودن دو عدد m و n، نمی‌توان $\sqrt{۷}$ را به‌صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت:

از برهان خُلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم، عدد $\sqrt{۷}$ را بتوان به‌صورت $\frac{m}{n}$ نوشت و، بعد، نتیجه می‌گیریم که چنین فرضی ما را به بُن‌بست می‌کشاند.

$\frac{m}{n}$ را کسری ساده‌نشدنی فرض می‌کنیم، یعنی m و n نسبت به‌هم، اول‌اند. بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد m و n برابر است با واحد (دو عدد m و n، با هم، جز واحد، بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نیستند).
اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{۷}$ عدد گویا باشد و داشته‌باشیم:

$$\sqrt{۷} = \frac{m}{n} \Rightarrow ۷ = \frac{m^{۲}}{n^{۲}}$$

از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$m^{۲} = ۷n^{۲} \qquad (*)$$

سمت راست برابری بر ۷ بخش‌پذیر است، پس باید $m^{۲}$، یعنی m هم بر ۷ بخش‌پذیر باشد و داشته‌باشیم: $(k \in \mathbf{Z}) m = ۷k$. به‌جای m در برابری $(*)$ می‌گذاریم:

$$۴۹k^{۲} = ۷n^{۲} \Rightarrow ۷k^{۲} = n^{۲}$$

و از این برابری، باید نتیجه گرفت، عدد n بر ۷ بخش‌پذیر است.

m و n را نسبت به‌هم اول گرفته‌بودیم، ولی اگر $\sqrt{۷}$ را برابر $\frac{m}{n}$ بگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم که، هر دو عدد m و n، بر ۷ بخش‌پذیر هستند. این نتیجه، فرض ما را نقض می‌کند، یعنی درواقع، فرض ما نادرست بوده‌است و نمی‌توان $\sqrt{۷}$ را به‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{۷}$ یک عدد گنگ است.

تعداد عددهای گنگ، بی‌نهایت است؛ از این جالب‌تر، بین هر دو عدد گویا، پایین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی گویند.

می‌دانید برای محاسبهٔ محیط یا مساحت دایره، از عدد π (پی) استفاده می‌کنیم و آن را به‌تقریب برابر ۳/۱۴ می‌گیریم. ولی π عددی گنگ است و در نمایش دهدهی آن، هرقدر جلو برویم، به پایان نمی‌رسد، هیچ‌گونه نظمی در رقم‌های دهدهی این عدد وجود ندارد و قابل‌تبدیل به نسبت دو عدد درست نیست، پس π، و همچنین مضرب‌های درست آن، عددهایی گنگ هستند. در این‌جا، مقدار π و نتیجهٔ برخی عمل‌های با آن را تا ۵ رقم بعد از ممیز داده‌ایم.

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹; \frac{\pi}{۲} = ۱/۵۷۰۷۹;$$

$$\frac{۱}{\pi} = ۰/۳۱۸۳۱; \frac{۱}{۲\pi} = ۰/۱۵۹۱۵;$$

$$\pi^{۲} = ۹/۸۶۹۶۰; \sqrt{\pi} = ۱/۷۷۲۴۵$$

جسمی که از یک بلندی به‌طرف زمین رها شود (به شرطی‌که از نیروی مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم)، ضمن سقوط خود شتاب می‌گیرد، به‌این ترتیب که به تقریب، در ثانیهٔ اول ۵ متر، در ثانیهٔ دوم ۱۵ متر، در ثانیهٔ سوم ۲۵ متر، در ثانیهٔ چهارم ۴۵ متر و ... حرکت می‌کند، یعنی در هر ثانیه، به تقریب ۱۰

متر بیشتر از ثانیهٔ قبل. این ۱۰ متر را «شتاب ثقل» زمین می‌نامند و آن را با حرف g نشان می‌دهند.

مقدار واقعی g، در نقطه‌های مختلف زمین فرق می‌کند و، درهرحال، عددی گنگ است. در این‌جا، مقدار تقریبی g که مربوط به سطح دریا در عرض ۴۵ تا ۵۰ درجهٔ جغرافیایی است، داده شده‌است:

$$g = ۹/۸۱; \qquad g^{۲} = ۹۶/۲۳۶;$$
$$\frac{۱}{g} = ۰/۱۰۱۹; \qquad \sqrt{g} = ۳/۱۳۲۱;$$
$$\pi\sqrt{g} = ۹/۸۳۹۸; \quad \pi\sqrt{۲g} = ۱۳/۹۱۵۵$$

هر چه در ریاضیات جلوتر بروید، با عددهای گنگ بیشتری سروکار پیدا می‌کنید.

§۳. پیدا کردن پاره‌خط‌های راست، با طولی برابر عدد $\sqrt{n}$

هر عدد دلخواه گنگ را نمی‌توان، به‌کمک خط‌کش و پرگار، روی یک پاره‌خط راست نشان داد. مثلاً π، یکی از این عددهاست. پیدا کردن پاره‌خط راستی به‌طول برابر π، از همان دوران یونان باستان مطرح بوده‌است و بسیاری از ریاضی‌دانان تلاش کرده‌اند، این مساله را، به‌کمک خط‌کش و پرگار حل کنند تا این‌که، سرانجام، در سده‌های اخیر ثابت شد، چنین رسمی ممکن نیست. البته، اگر خود را به خط‌کش و پرگار محدود نکنیم، می‌توان راه‌حل‌هایی برای این مساله پیدا کرد.

یا مقوا، استوانه‌ای بسازید که قطر قاعدهٔ آن برابر واحد باشد. ارتفاع استوانه را به دلخواه خود، و مثلاً برابر ۲ بگیرید. اکنون، اگر سطح جانبی استوانه را، رنگی کنید و تا رنگ آن خشک نشده، درست یک دور کامل، روی صفحهٔ سفید کاغذ بغلطانید. اثر رنگ، مستطیلی را روی کاغذ سفید

ایجاد می‌کند که، یک بُعد آن، برابر ۲ (همان ارتفاع استوانه) و بُعد دیگرش، برابر π است، زیرا این بُعد، برابر با محیط قاعدهٔ استوانه، یعنی π است.

ولی، اگر n عددی طبیعی باشد، $\sqrt{n}$ را به‌کمک خط‌کش و پرگار، می‌توان ساخت.

دیدیم، $\sqrt{۲}$ برابر است با طول قطر مربع به ضلع ۱. اکنون، اگر مستطیلی به‌طول برابر $\sqrt{۲}$ و عرض برابر ۱ رسم کنیم، طول قطر آن، برابر $\sqrt{۳}$ می‌شود (بگویید چرا؟).

طول قطر مستطیلی با بُعدهای برابر $\sqrt{۳}$ و ۱، برابر $\sqrt{۴}$، یعنی ۲ می‌شود.

مستطیل با بُعدهای ۲ و ۱، قطری به‌اندازهٔ $\sqrt{۵}$ و مستطیل با بُعدهای $\sqrt{۵}$ و ۱، قطری به‌اندازهٔ $\sqrt{۶}$ دارد و غیره.

اکنون روشن است، برای ساختن عدد گنگی مثل $\sqrt{۵} - \sqrt{۲}$، کافی است، پاره‌خط راست به‌طول $\sqrt{۲}$ را از پاره‌خط راست به‌طول $\sqrt{۵}$ جدا کنیم، بقیهٔ پاره‌خط راست برابر $\sqrt{۵} - \sqrt{۲}$ خواهد بود.

یادداشت ۱. مجموعهٔ عددهای حقیقی، نسبت به عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و توان، مجموعه‌ای بسته است، ولی نسبت به عمل ریشه گرفتن، بسته نیست. به‌این ترتیب، مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب، خارج‌قسمت دو عدد حقیقی، بازهم عددی حقیقی است. همچنین با به‌توان رساندن یک عدد حقیقی، درنتیجهٔ عمل، عددی حقیقی به‌دست می‌آید. ولی در ریشهٔ عددهای حقیقی، وضع فرق می‌کند. مثلاً ۲- عددی حقیقی است، درحالی‌که $\sqrt{-۲}$، عددی حقیقی نیست، یعنی نمی‌توان عددی حقیقی پیدا کرد که ضمن ضرب در خودش، برابر ۲- شود.

یادداشت ۲. مجموعهٔ عددهای حقیقی، محور عددی را پر می‌کنند، یعنی، اگر روی یک خط راست، نقطه‌ای را به‌عنوان مبداء (نمایندهٔ عدد صفر) و پاره‌خط راستی را به‌عنوان واحد و جهتی‌را برای عددهای مثبت (و درنتیجه،

جهت عکس آن را برای عددهای منفی) انتخاب کنیم، آن‌وقت، مجموعهٔ نقطه‌های این محور عددی، با مجموعهٔ عددهای حقیقی، در تناظر یک‌به‌یک خواهندبود، یعنی هر نقطهٔ واقع بر محور عددی، نمایندهٔ یک (وتنها یک) عدد حقیقی است و، برعکس،هر عدد حقیقی، متناظر با یک نقطه (وتنها یک نقطه) از محور عددی است.

مجموعهٔ عددهای حقیقی را با $\mathbf{R}$ نشان می‌دهند.

* **یادداشت ۳.** عددهای گنگ هم، به‌نوبهٔ خود، به دو گروه تقسیم می‌شوند: **عددهای جبری و عددهای غیرجبری.**

عددهای جبری، آن‌هایی هستند که می‌توانند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های درست باشند، مثلاً $\sqrt{۲}$ عددی جبری است، زیرا یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۲ = ۰$ است. همچنین $\sqrt{۳} + ۲$، عددی جبری است، زیرا در معادلهٔ $x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰$ صدق می‌کند. روشن است که، با این تعریف، همهٔ عددهای گویا، عددهای جبری هستند.

عدد غیر جبری، عددی است که نتواند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های درست باشد. مثلاً، عددهای π، g، $\frac{۱}{\pi}$ و $\sqrt{g}$، عددهای غیر جبری‌اند.

باتوجه به این یادداشت، می‌توان مجموعهٔ عددهای حقیقی را، اجتماع دو مجموعه دانست. مجموعهٔ عددهای جبری و مجموعهٔ عددهای غیرجبری.

§۴. قدرمطلق

خسرو ۵۰۰ ریال موجودی و جواد ۵۰۰ ریال قرض دارد. در این‌جا، هم برای خسرو و هم برای جواد، از عدد ۵۰۰ استفاده کرده‌ایم، درحالی که اولی با دومی فرق دارد. درواقع، خسرو ۵۰۰+ ریال و جواد ۵۰۰− ریال دارد.

وقتی تنها خود عدد را به‌کار بریم و به علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) توجهی نداشته‌باشیم، گوییم **با قدرمطلق عدد** سروکار داریم. برای نشان دادن قدرمطلق، دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی در دوطرف عدد قرار

می‌دهیم. بنابراین

$$|+500| = 500 \text{ و } |-500| = 500$$

به‌زبان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد، مقدار عددی آن، با علامت مثبت است، چراکه می‌دانیم ۵۰۰، یعنی ۵۰۰+.

مثال ۱. قدرمطلق عددهای $\sqrt{3} - 2$ و $\sqrt{3} - 1$ چقدر است؟

حل. ۲ از $\sqrt{3}$ بزرگتر و بنابراین $\sqrt{3} - 2$ عددی مثبت است، پس

$$|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

ولی ۱ از $\sqrt{3}$ کوچکتر و $\sqrt{3} - 1$ منفی است و می‌توان آن را به‌صورت

$$-(\sqrt{3} - 1)$$

نوشت، بنابراین

$$|1 - \sqrt{3}| = |-(\sqrt{3} - 1)| = \sqrt{3} - 1$$

مثال ۲. قدرمطلق عدد حقیقی a چقدر است؟

حل. در مثال ۱ دیدیم، اگر عددی مثبت باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر می‌شود. ولی اگر عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد می‌شود:

اگر $a > 0$، آن‌وقت $|a| = a$؛

اگر $a < 0$، آن‌وقت $|a| = -a$.

روشن‌است، اگر $a = 0$، آن‌وقت می‌توان $|a|$ را برابر a یا $-a$ نوشت (زیرا ۰ با ۰− فرقی ندارد)، ولی معمول شده‌است که در حالت صفر بودن a هم، قدرمطلق a را برابر a می‌نویسند.

تمامی حل را می‌توان بایک برابری نشان داد.

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq ۰) \\ -a & (a < ۰) \end{cases}$$

یادداشت مهم. مواظب باشد، در جبر مقدماتی، $\sqrt{۴}$ با جذر ۴ فرق دارد: جذر عدد ۴، می‌تواند ۲+ باشد یا ۲−؛ ولی $\sqrt{۴}$ همیشه برابر است با ۲، یعنی قدرمطلق ۲+ و ۲−. به‌این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^۲} = |a|$$

مثال ۳. حاصل $\sqrt{(۳ - \sqrt{۱۰})^۲}$ را پیدا کنید.

حل. داریم:

$$\sqrt{(۳ - \sqrt{۱۰})^۲} = |۳ - \sqrt{۱۰}|$$

$۳ - \sqrt{۱۰}$، عددی منفی است (۳ از $\sqrt{۱۰}$ کوچکتر است)، پس

$$|۳ - \sqrt{۱۰}| = |-(\sqrt{۱۰} - ۳)| = \sqrt{۱۰} - ۳$$

تمرین‌ها

۱۶۹. از مجموعه‌های $\mathbf{N}$ (عددهای طبیعی)، $\mathbf{Z}$ (عددهای درست)، $\mathbf{Q}$ (عددهای گویا) و $\mathbf{R}$ (عددهای حقیقی)، کدام، زیرمجموعهٔ کدام است؟

۱۷۰. از این عددها کدام گویا و کدام گنگ است؟

$$۱)\ \sqrt{۳} - ۱; \quad ۲)\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}; \quad ۳)\ \frac{۱}{۵}\pi;$$

$$۴)\ \sqrt{۹} - \sqrt{۴}; \quad ۵)\ \frac{۲\sqrt{۳} - \sqrt{۲۴}}{\sqrt{۳}};$$

$$۶)\ ۳/۱۴; \quad ۷)\ \frac{۱}{\pi}\sqrt{\pi}$$

۱۷۱. ده عدد گویا پیدا کنید که از ۳/۱۴ بزرگتر از π کوچکتر باشند.

۱۷۲. یک عدد گنگ پیدا کنید که بین ۱/۴۱۴ و $\sqrt{۲}$ باشد.

۱۷۳. به این پرسش‌ها، پاسخ دهید:

۱) از دو کسر متعارفی که مخرج‌های برابر دارند، کدام بزرگتر است؟

۲) از دو کسر با صورت‌های برابر، کدام بزرگتر است؟

۳) از دو عدد مثبت، کدام بزرگتر است؟

۴) از دو عدد منفی، کدام بزرگتر است؟

۱۷۴. a عددی است حقیقی. a بزرگتر است یا $|-a|$؟

۱۷۵. $|a|+|b|$ بزرگتر است یا $|a+b|$؟

۱۷۶. $|a|-|b|$ بزرگتر است یا $|a-b|$؟

۱۷۷. آیا این برابری‌ها درست‌اند؟ چرا؟

$$۱)\ |x|\cdot|y| = |x\cdot y|; \quad ۲)\ \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

۱۷۸. حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ |-۳| + |+۵| - |-۱|;$$
$$۲)\ |۹-\sqrt{۸۲}| + |۱۰-\sqrt{۸۲}|;$$
$$۳)\ |۲\sqrt{۶}-۵| - |۶-\sqrt{۲۴}|$$

۱۷۹. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه درآن، عددهایی گویا و وتر آن، برابر باشد با

$$۱)\ \sqrt{۵}; \quad ۲)\ \sqrt{۱۳}; \quad ۳)\ \sqrt{۱۷};$$
$$۴)\ ۲\sqrt{۱۰}; \quad ۵)\ ۲\sqrt{۵}; \quad ۶)\ \sqrt{۱۵۷}$$

*۱۸۰. چرا این عددهای گنگ، عددهای جبری‌اند؟

$$۱)\ \sqrt{۷}; \quad ۲)\ \frac{\sqrt{۵}}{۲}; \quad ۳)\ ۲\sqrt{۳};$$
$$۴)\ \sqrt{۳}-۱; \quad ۵)\ \sqrt{۷}+۲$$

*۱۸۱. ثابت کنید، اگر طول ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، عددهایی درست باشند (مثلث فیثاغوری)، از این عددها، همیشه، دست‌کم یکی بر ۲، دیگری بر ۳ و سومی بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۸۲. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ \frac{x}{|x|};\qquad ۲)\ \frac{|x|}{x};\qquad ۳)\ x-|x|;$$
$$۴)\ |x|+|x-۵|$$

۱۸۳. x را پیدا کنید، به‌شرطی‌که داشته‌باشیم:

$$۱)\ x-|x|=-۲;\qquad ۲)\ |x-۱|=۴;$$
$$۳)\ |۲x+۳|-۱=۰;\quad ۴)\ \frac{x}{|x-۳|}=۱$$

۷. جمله و چندجمله‌ای

§۱. ورود به مطلب

به این ۳ مساله توجه کنید:

مسالهٔ ۱. ۱۲ سیب را بین دونفر طوری تقسیم کنید که، یکی از آن‌ها، دوبرابر دیگری داشته باشد.

مسالهٔ ۲. عدد ۱۲ را به‌نسبت ۱ : ۲ تقسیم کنید.

مسالهٔ ۳. عدد a را به‌نسبت $m : n$ تقسیم کنید.

در مسالهٔ اول صحبت برسر میوهٔ سیب است، درحالی‌که در مسألهٔ دوم، به هیچ‌چیز مشخصی توجه ندارد. دو مساله، یکی است، ولی اولی یک مسالهٔ مشخص است که، درعمل و زندگی، با آن روبه‌رو می‌شویم، ولی مسالهٔ دوم، کلی‌تر است و، به‌جای سیب، فقط از عدد صحبت کرده‌است.

فرق «۱۲ سیب» با «۱۲» در این است که، اولی تنها به «سیب» مربوط می‌شود، درحالی‌که «عدد ۱۲» را می‌توان برای هر چیزی به‌کار برد.

این جدایی از «سیب» و «پول» و «مداد» و غیره را، در ریاضیات، «انتزاع» گویند. وقتی مساله‌ای را که دربارهٔ «سیب‌ها» است، حل می‌کنیم، یک مسالهٔ مربوط به چیزی خاص (یعنی سیب) است، ولی وقتی مساله را دربارهٔ عدد ۱۲ حل می‌کنیم، دیگر به چیز خاصی وابسته نیست: ۱۲ می‌تواند، ۱۲ سیب باشد یا ۱۲ دفترچه یا ۱۲ گوسفند. و «انتزاع»، یعنی جدا شدن از چیزهای مشخص.

در طول زندگی نسل‌های انسان‌های نخستین، هزاران سال گذشت، تا ضمن تجربه دریافتند، در ۱۲ است و ۱۲ مرد و ۱۲ درخت، چیز مشترکی وجود دارد که همان«عدد ۱۲» است. پیدایش عددها، بدون وابستگی آن‌ها به چیزی یا موجودی، نخستین «انتزاع» در ریاضیات بود.

در مسالهٔ ۳، «انتزاع» در مرحلهٔ بالاتری انجام شده‌است. به‌جای «عدد ۱۲»، «عدد a» و به‌جای نسبت ۱ : ۲، نسبت $m : n$ آمده‌است. مساله، بازهم کلی‌تر شده‌است. یعنی اگر مسالهٔ ۳ را حل کنیم، آن‌وقت هر مسالهٔ دیگری را، که به‌جای a و m و n، عدد گذاشته‌باشند، می‌توانیم حل کنیم.

اگر بخش‌های عدد a را x و y بنامیم، جواب مسالهٔ ۳، چنین است:

$$x = \frac{ma}{m+n} \text{ و } y = \frac{na}{m+n} \qquad (۱)$$

برابری‌های (۱)، دستورها یا فرمول‌هایی هستند که، به‌کمک آن‌ها، می‌توان مثلاً، جواب مسالهٔ ۲ را نوشت. در مسالهٔ ۲، داریم $a = ۱۲$، $m = ۲$ و $n = ۱$؛ پس

$$x = \frac{۲ \times ۱۲}{۲+۱} = ۸ \text{ و } y = \frac{۱ \times ۱۲}{۲+۱} = ۴$$

درواقع، در مرحلهٔ دوم «انتزاع»، به‌جای عددهای مشخص، با «حرف‌ها» (a و m و n و x و y) سروکار داشتیم. و این، یعنی، تبدیل «حساب» به «جبر».

□

واژهٔ «جبر» از نام کتاب خوارزمی به‌نام «الجبروالمقابله» گرفته شده‌است. خوارزمی که در زمان مأمون خلیفهٔ عباسی می‌زیست، نخستین کسی است که کتاب مستقلی‌دربارهٔ «جبر» نوشت. این ریاضی‌دان و اخترشناس ایرانی، کتاب خود را به این قصد نوشت که راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم را نشان دهد.

درواقع «جبر مقدماتی» یا «جبر دبیرستانی»، در اساس به‌معنی حل معادله‌هاست و همهٔ بحث‌های جانبی دیگر آن، به‌منظور آماده کردن زمینه‌های لازم، برای حل معادله است.

خود نام کتاب خوارزمی، یعنی «جبر و مقابله»، گواهی برهمین مطلب است. او، «جبر» را به‌معنای «جبران کردن» می‌گرفت و، به‌زبان ریاضیات امروزی، به‌مفهوم انتقال جملهٔ منفی از یک طرف برابری، به‌طرف دیگر است، یعنی عملی که موجب مثبت شدن علامت جمله می‌شود. خوارزمی، «مقابله» (مقابل هم قرار دادن) را به‌معنای حذف جمله‌های برابر، در دوطرف معادله می‌دانست.

البته، خوارزمی و ریاضی‌دانان ایرانی بعد از او (که دانش جبر را تکامل دادند)، مثل کرجی، خیام و جمشید کاشانی، از «حرف» و «علامت» برای نوشتن دستورها و فرمول‌ها استفاده نمی‌کردند و همه چیز را، با بیان و گفتار، و بدون هیچ نمادی، توضیح می‌دادند. مثلاً، نماد برابری، یعنی «=»، در سدهٔ شانزدهم میلادی و به‌وسیلهٔ *روبرت رکورد*، ریاضی‌دان و پزشک انگلیسی (۱۵۱۰_۱۵۵۸) وارد ریاضیات شد. باوجود این، مدتی طول کشید تا این نماد عمومی شد. مثلاً *رنه دکارت*، ریاضی‌دان و فیلسوف بزرگ فرانسوی (۱۵۹۶_۱۶۵۰میلادی) که نزدیک به یک سده، بعد از «رکورد» می‌زیست، برای برابری، از نماد «$\propto$» استفاده می‌کرد (در کتاب معروف خود، به‌نام «هندسه»). خود «رکورد»، دلیل انتخاب این نماد را برای برابری، این‌طور توضیح می‌دهد: «هیچ دو چیزی، نمی‌توانند بهتر از دو پاره‌خط راست، باهم برابر باشند».

نمادهای ساده‌ای که برای جمع «+» یا تفریق «−» به‌کار می‌بریم، برای نخستین بار، در سال ۱۴۸۲ میلادی، در کتاب «حساب» *اولبریخت واگنر* و، سپس، در کتاب «رساله‌ای دربارهٔ حساب»، اثر *یوهان ویدمان* به‌کار برده شد (این دو ریاضی‌دان، آلمانی بودند و کتاب‌های آن‌ها در لایپزیک چاپ شد).

به‌کار بردن «حرف‌های الفبای لاتینی»، برای مجهول و هم‌ضریب‌های عددی، برای نخستین بار به‌وسیلهٔ *فرانسواویت* (۱۵۴۰_۱۶۰۳ میلادی) معمول شد و دکارت هم، که پس از او می‌زیست، همین روش را پذیرفت

و حرف‌های نخست الفبا، یعنی a، b، c، ... را برای مقدارهای معلوم و حرف‌های آخر الفبا، یعنی x و y و z، ...، رابرای مقدارهای مجهول به‌کاربرد.

بنابراین، مفهوم‌هایی از «جبر»، مثل «جمله»، «ضریب»، «چندجمله‌ای» و غیرآن، در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی وجود ندارد. با وجوداین، خوارزمی، گونه‌های مختلف معادلهٔ درجه دوم را، با همان روش امروزی (ولی با بیان و توضیح و نه با فرمول) حل می‌کرد. البته، خوارزمی، برای ضریب‌ها، از عددهای درست و مثبت استفاده می‌کرد و به ریشهٔ منفی معادله هم، توجهی نداشت. در کتاب خوارزمی، برای حل معادله‌ها، به‌جز روش جبری، اغلب از روش‌های هندسی هم استفاده شده‌است. خیام، به‌جز معادله‌های درجهٔ دوم، به گونه‌های مختلف معادلهٔ درجهٔ سوم هم پرداخته است، ولی بیشتر به یاری هندسه، جواب را (و البته، جواب مثبت را) به‌دست آورده است.

§۲. جمله

$2x^2$، $-3y$، $4xy^2$ و ax^n (n، عددی درست و مثبت یا صفر)، هرکدام، یک جمله را معرفی می‌کنند و، به‌همین مناسبت، در جبر، به آن‌ها **یک‌جمله‌ای** یا **جمله** گویند.

در ax^n، اگر n عددی منفی یا کسری باشد، آن‌وقت به‌طور معمول، به آن جمله نمی‌گویند. به‌این‌ترتیب، $\frac{1}{x}$، $\frac{4x}{y}$، $\sqrt{x}$ و $\frac{1}{x}yz$، جمله نیستند.

بنابراین، جمله، یعنی عبارتی که، درآن، برای حرف‌ها، تنها نماد ضرب و توان طبیعی وجود داشته‌باشد. به‌این معنا، x و 5 و $\frac{3}{4}a^3$، جمله یا یک‌جمله‌ای هستند، زیرا، برای حرف‌ها، عمل جمع، تفریق، تقسیم و غیره وجود ندارد.

در ax^n ($n \in N$ یا $n = 0$)، a را ضریب عددی و n را درجهٔ جمله گویند. ضریب عددی، می‌تواند هر عدد حقیقی (درست، کسری یا گنگ)

باشد. به‌همین مناسبت $-\frac{۳}{۵}a^۲$ یا $x\sqrt{۵}$ یا $\frac{ab^۲}{\sqrt{۳}}$، یک‌جمله‌ای هستند.

یادداشت. گاهی، یک‌جمله‌ای را تنها با این شرط تعریف می‌کنند که، درآن، عمل جمع و تفریق وجود نداشته‌باشد. مثلاً $\frac{۳}{a}$، $\sqrt{۲x}$، $\frac{۳}{x}y$ راهم، یک جمله‌ای می‌دانند؛ ولی منطقی‌تر این است که، ولو با قبول این تعریف بگوییم: $\frac{۳}{x}$ و $\frac{۲}{x}y$، نسبت به x، جمله‌ای کسری، $\sqrt{۲x}$ نسبت به x، جمله‌ای گنگ و $\frac{y}{\sqrt{x}}$ نسبت به x، کسری و گنگ است. در این کتاب، اغلب، این‌گونه عبارت‌ها را، یک‌جمله‌ای نمی‌نامیم. به این نکته هم توجه کنیم: $\frac{۵}{a}x^۴$ نسبت به x، یک جمله‌ای، ولی نسبت به a، کسری است. اگر مجهول (یا متغیر) را x بدانیم و a، نمایندهٔ عدد ثابتی باشد، $\frac{۵}{a}x^۴$، یک‌جمله‌ای است که، درآن، $\frac{۵}{a}$ ضریب عددی جمله و ۴ درجهٔ جمله است.

جمله‌ای که شامل چند متغیر است. دیدیم که، مثلاً ax^ny^m هم (m و n عددهایی طبیعی یا صفر و a عددی حقیقی)، یک‌جمله‌ای است. در این جمله، a ضریب عددی و x و y، متغیرهای جمله‌اند؛ مگر این‌که، به‌دلیلی، تاکید شده‌باشد، تنها نسبت به متغیر y. دراین‌صورت (یعنی وقتی که x متغیر نباشد)، ax^n ضریب عددی و m درجهٔ جمله (نسبت به متغیر y) می‌شود. در همین جمله، اگر متغیر را x بدانیم، آن‌وقت، نسبت به متغیر x، ay^m ضریب عددی و n درجهٔ جمله است.

ولی اگر هردو مجهول x و y را متغیر بدانیم، آن‌وقت، a ضریب عددی جمله و $m+n$ درجهٔ آن است:

برای پیدا کردن درجهٔ یک‌جمله‌ای، باید نماهای متغیرها را باهم جمع کرد

جملهٔ $۲xy^۲$، نسبت به متغیرهای x و y، از درجهٔ ۳ و جملهٔ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}a^۲b^۳c$، نسبت به متغیرهای a و b و c، از درجهٔ ۶ است.

توجه کنید: جملهٔ $۵x^۳y^۴z^۷$، نسبت به x، از درجهٔ سوم؛ نسبت به y، از درجهٔ چهارم؛ نسبت به z، از درجهٔ هفتم؛ نسبت به x و y، از درجهٔ هفتم؛ نسبت به x و z، از درجهٔ دهم؛ نسبت به y و z از درجهٔ یازدهم و، سرانجام، نسبت به x و y و z از درجهٔ چهاردهم است.

جمله‌های متشابه. دو جمله، اگر تنها در ضریب عددی خود، اختلاف داشته‌باشند، متشابه نامیده می‌شوند.

$۳x$ و $\frac{۱}{۲}x$ و $x\sqrt{۵}$، سه‌جملهٔ متشابه‌اند. همچنین $x^۲$ با $\frac{۳}{۵}x^۲$؛ $۲xy$ با $۷xy$ و $۴a^۲b$ با $\frac{۳}{۵}a^۲b$ متشابه‌اند.

دو جملهٔ $۴a^۳b$ و $۵a^۳b^۲$، نسبت به دو متغیر a و b، متشابه نیستند؛ ولی نسبت به متغیر a متشابه‌اند (که دراین صورت، ضریب عددی اولی برابر $۴b$ و ضریب عددی دومی برابر $۵b^۲$ می‌شود).

برای جمع و تفریق (یا به‌زبان دیگر، برای جمع جبری) دو یا چند جملهٔ متشابه، باید ضریب‌های عددی را باهم جمع یا از هم کم کرد و نتیجه را، ضریب متغیر قرار داد:

$$۳a + ۴a = (۳ + ۴)a = ۷a;$$
$$\frac{۲}{۵}x^۳ + x^۳ = (\frac{۲}{۵} + ۱)x^۳ = \frac{۷}{۵}x^۳;$$
$$x^۲y - ax^۲y + ۳ax^۲y = (۱ - a + ۳a)x^۲y = (۲a + ۱)x^۲y;$$
$$at^۲ + bt^۲ - ct^۲ = (a + b - c)t^۲$$

ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها. برای انجام عمل ضرب یا تقسیم، در یک‌جمله‌ای‌ها، ضریب‌های عددی را درهم و متغیرهای هم‌نام را در یکدیگر ضرب و یا برهم تقسیم می‌کنیم:

$$(۲x^۲) \times (۳x) = (۲ \times ۳) \cdot (x^۲ \cdot x) = ۶x^۳;$$

$$\frac{۲x^۲}{۳x} = (\frac{۲}{۳}) \cdot (\frac{x^۲}{x}) = \frac{۲}{۳}x;$$
$$(۱۵x^۲y) \times (۳xy^۲) = (۱۵ \times ۳) \cdot (x^۲ \cdot x) \cdot (y \cdot y^۲) =$$
$$= ۴۵x^۳y^۳;$$
$$\frac{۱۵x^۲y}{۳xy^۲} = (\frac{۱۵}{۳}) \cdot (\frac{x^۲}{x}) \cdot (\frac{y}{y^۲}) = \frac{۵x}{y};$$
$$(۳xz^۳) \times (۲x^۳) = (۳ \times ۲) \cdot (x \cdot x^۳) \cdot z^۳ = ۶x^۴z^۳;$$
$$\frac{۳xz^۳}{۲x^۳} = (\frac{۳}{۲}) \cdot (\frac{x}{x^۳}) \cdot z^۳ = \frac{۳z^۳}{x^۲}$$

چندجمله‌ای. خود نام چندجمله‌ای، معنای آن را روشن می‌کند:
$a + b$ یا $۲a - c$ یا $۵x^۲ + ۳y$، دو جمله‌ای هستند؛
$a + b - c$ یا $x^۲ - ۲x - ۱$ یا $xy + x - y$، سه‌جمله‌ای‌اند و
$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x - ۴$، یک چهارجمله‌ای است. این عبارت درضمن، یک چندجمله‌ای بایک متغیر و از درجهٔ سوم است.

وقتی چندجمله‌ای دارای یک متغیر باشد، بزرگترین درجه، در بین جمله‌ها، درجهٔ چندجمله‌ای نامیده می‌شود. عبارت

$$ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + lx + m$$

یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

درجهٔ جملهٔ ۵ برابر صفر است، زیرا می‌توان آن را به‌صورت $۵x^۰$ نوشت ($x^۰ = ۱$)؛

دوجمله‌ای $x^۲ - ۱$ از درجهٔ دوم است؛

چندجمله‌ای $۲x^۵ - x^۳ + ۳x - ۱$، از درجهٔ پنجم است؛

جملهٔ $۳x^۲y^۳$، نسبت به x از درجهٔ دوم، نسبت به y از درجهٔ سوم و نسبت به x و y، از درجهٔ پنجم است $(۲ + ۳ = ۵)$؛

چندجمله‌ای $x^{۲}y + ۱ - x^{۲} + y^{۲}$، نسبت به x از درجهٔ دوم، نسبت به y از درجهٔ دوم و، نسبت به x و y، از درجهٔ سوم است.

درجهٔ یک جمله، نسبت به چند متغیر، *برابر است با مجموع نماهای همهٔ متغیرهای آن.*

وقتی چندجمله‌ای شامل یک متغیر باشد، به یکی از دو صورت، می‌توان آن را منظم کرد. مثلاً چندجمله‌ای

$$x^{۲} - ۳x + x^{۵} - ۷x^{۳} + ۱۲ - x^{۴}$$

را می‌توان به‌صورت

$$x^{۵} - x^{۴} - ۷x^{۳} + x^{۲} - ۳x + ۱۲ \qquad (۱)$$

و یا به‌صورت

$$۱۲ - ۳x + x^{۲} - ۷x^{۳} - x^{۴} + x^{۵} \qquad (۲)$$

نوشت. درحالت (۱)، چندجمله‌ای برحسب توان‌های نزولی x و درحالت (۲)، برحسب توان‌های صعودی x منظم شده‌است. همیشه بهتر است، چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی x منظم کنیم که، دراین‌صورت، آن را **شکل متعارف چندجمله‌ای** گویند.

مثال. چندجمله‌ای

$$x^{۵} + y - x^{۳}y^{۲} + x^{۴} - ۱ + x^{۲} - ۳xy$$

را برحسب توان‌های نزولی متغیر x منظم کنید.

پاسخ.

$$x^{۵} + x^{۴} - y^{۲}x^{۳} + x^{۲} - ۳yx + y - ۱$$

وقتی، چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی (یا صعودی) یک متغیر منظم می‌کنیم، بهتر است، در هر جمله، متغیر یا متغیرهای دیگر را به‌صورت ضریب این متغیر بنویسیم. وقتی نسبت به متغیر x منظم می‌کنیم، باید نوشت: $-yx^۳$ ونه $-x^۳y$.

تمرین‌ها

۱۸۴. در این چندجمله‌ای‌ها، x متغیر و a و b و c، عددهای ثابت‌اند؛ آن‌ها را ساده و برحسب توان‌های نزولی x منظم کنید:

$$۱)\ ۳x - ۴x + ۱; \qquad ۲)\ x^۲ + ۱ - ۴x^۲ + ۲x;$$
$$۳)\ (x^۲ + ۱) + (۳x^۲ - x) - (۵x + ۱);$$

۱۸۵. هریک از این دو عبارت را ساده کنید:

$$۱)\ -۲n - \{-۵n - [-۸n - (۵ - ۳n)]\};$$
$$۲)\ ۴a^۲b - \{ab^۲ - [-۵a^۲b - (۲ab^۲ - ۱) - (۱ - ۳ab^۲)]\}$$

۱۸۶. در عبارت $a(x^۲ - ۱) + ۱ - x^۲$، دو جملهٔ آخر را طوری داخل یک پرانتز قرار دهید که، مقدار داخل پرانتز، با پرانتزی که در عبارت وجود دارد، برابر شود.

۱۸۷. می‌دانیم $A = a^۲ + ۳ab + b^۲$ و $B = a^۲ + ۶ab - b^۲$ حاصل این عبارت را، برحسب توان‌های نزولی a، منظم کنید:

$$F = A - [B - ۲A - (A - B)]$$

۱۸۸. ثابت کنید، مجموع دو عدد فرد پشت سرهم، بر ۴ بخش‌پذیر است.

۱۸۹. جای دو رقمِ یک عدد دورقمی را عوض و، سپس، با عدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، این مجموع بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۹۰. چه عددی را از a کم کنیم تا تفاضل، برابر قرینهٔ عدد a شود؟

۱۹۱. قرینهٔ عدد ۲− را با عکس عدد $-\frac{۱}{۲}$ جمع کرده‌ایم. مجموع چقدر است؟

۱۹۲. عدد $-(a+b)$، به‌ازای چه مقدارهایی از a و b، عددی مثبت می‌شود؟ به‌ازای چه مقدارهایی از a و b، برابر صفر است؟

۱۹۳. مقدار هریک از این عبارت‌های جبری را، به‌ازای $x=-۲$ و $y=۵$ پیدا کنید:

$$۱)\ (x^۲-y^۲):x-y;\quad ۲)\ x^۲-y^۲:x-y;$$
$$۳)\ x^۲-y^۲:(x-y);\quad ۴)\ (x^۲-y^۲):(x-y)$$

۱۹۴. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

۱) $\dfrac{\frac{۳}{۴}+ab-b^۲}{۵a^۳-ab}$ به‌ازای $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=-۱$؛

۲) $\dfrac{a^۲-ab+\frac{۱}{۳}}{۸a^۳b^۳}$ به‌ازای $a=-۰/۵$ و $b=\frac{۲}{۳}$؛

۳) $\dfrac{۳m^۲n+\frac{۳}{m}-n}{۲m-m:n}$ به‌ازای $m=-\frac{۲}{۳}$ و $n=-۲$؛

۴) $\dfrac{۳(x-y)^۲+۳(x-y^۲)}{xy^۲-(xy)^۲}$ به‌ازای $x=-۰/۵$ و $y=-\frac{۲}{۳}$؛

۵) $\dfrac{x^۲-y^۲-۲xy}{(۲xy-y)^۲-۲(x-y)}$ به‌ازای $x=-۵$ و $y=-۷$؛

۶) $\dfrac{۱}{a-۱}-\dfrac{۱}{a+۱}+\dfrac{a^۳}{a-۱}+\dfrac{a^۳}{a+۱}$ به‌ازای $a=-۱/۵$.

۱۹۵. حاصل را به‌دست آورید:

$$۱)\ -(۱۲a^۲+c)+(۴a^۲+۲b-۲x^۲y^۲)+(۷b+۲x^۲y^۲);$$

۲) $(5ax^2y^5)\cdot(-3a^3x^4z)$;

۳) $12x^3y^4z^5 : 4x^2yz^2$;

۴) $\dfrac{4x^2y^3}{2x^2y}$;

۵) $10x^2y^5 : 2x^6y^4$

۶) $(-3a^2b^3c)\cdot(7ab^2c^4)$;

۷) $(24x^2yz^3) : (-3xyz^2)$

۸) $a^2b(ab^2)^3$;

۹) $3xy(2x^2y)^2$

۱۹۶. اگر بدانیم $x^2\cdot(x^2)^a\cdot x^a = x^{17}$، مقدار a را پیدا کنید.

۱۹۷. در جملهٔ $13x^3y^2z$، ۱) ضریب عددی، ۲) ضریت x^3y^2z؛ ۳) ضریب y^2z، ۴) ضریب x^3؛ ۵) ضریب z، ۶) ضریب y^2 چیست؟

*۱۹۸. عددی سه‌رقمی را دراختیار داریم. ابتدا رقم‌ها را به ردیف عکس نوشته و عدد سه‌رقمی حاصل را از عدد اصلی کم کرده‌ایم. سپس، رقم‌های تفاضل را در جهت عکس نوشته و عدد حاصل را با خود تفاضل، جمع کرده‌ایم. مجموع اخیر، چه عددی است؟

*۱۹۹. چهار رقم برگزیده‌ایم و، با آن‌ها، بزرگترین و کوچکترین عدد چهاررقمی را ساخته‌ایم. مجموع این دو عدد چهاررقمی، برابر ۱۱۲۲۰ شده‌است. مجموع چهار رقم نخستین را پیدا کنید.

*۲۰۰. همهٔ عددهای سه‌رقمی را پیدا کنید که، برای هرکدام، هر رقم، عددی اول و، درضمن؛ بخشیابی از خود عدد باشد.

*۲۰۱. کدام عدد سه‌رقمی را در سمت راست عدد ۵۷۹ بنویسیم، تا عدد شش‌رقمی حاصل، بر ۵ و ۷ و ۹ بخش‌پذیر باشد؟

*۲۰۲. همهٔ کسرهای ساده‌نشدنی به مخرج p را درنظر می‌گیریم که

بین دو عدد طبیعی a و b $(a < b)$ قرار دارند. اگر p، عددی اول باشد، مجموع همهٔ این کسرها را پیدا کنید.

*۲۰۳. کدام رقم‌های x و y در این برابری صدق می‌کنند:

$$\overline{xxyy} = (\overline{xx})^۲ + (\overline{yy})^۲$$

۸. ضرب و تقسیم در چندجمله‌ای‌ها

۱§. ضرب چندجمله‌ای دریک جمله‌ای و تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای.

۱) برای ضرب یک‌جمله‌ای در چندجمله‌ای، باید این جمله را در هریک از جمله‌های چندجمله‌ای ضرب و حاصل‌ضرب‌ها را باهم جمع کرد (منظور از جمع، جمع جبری است، یعنی با رعایت علامت‌ها). مثلاً

$$
\begin{aligned}
&۵x^{۲}y(x^{۳}+۲x^{۲}y+۳y^{۲}-۲)=\\
&۵x^{۵}y+۱۰x^{۴}y^{۲}+۱۵x^{۲}y^{۳}-۱۰x^{۲}y
\end{aligned}
$$

۲) برای تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای، باید هریک از جمله‌های بخشی (مقسوم) را بر این جمله تقسیم و، خارج‌قسمت‌های حاصل را باهم جمع کرد. مثلاً

$$
\begin{aligned}
&(۲x^{۲}y^{۳}-۳xy^{۴}+۵xy):(۷xy)=\\
&=۲x^{۲}y^{۳}:۷xy+(-۳xy^{۴}):۷xy+۵xy:۷xy=\\
&=\frac{۲}{۷}xy^{۲}-\frac{۳}{۷}y^{۳}+\frac{۵}{۷}
\end{aligned}
$$

روشن است، برای این‌که یک چندجمله‌ای، بر جملهٔ مفروض، بخش‌پذیر باشد، باید هر جمله از چندجمله‌ای بر آن بخش‌پذیر باشد. در غیراین‌صورت، خارج‌قسمت، به‌جای یک چندجمله‌ای، یک کسر جبری می‌شود.

۲§. ضرب و تقسیم دو چندجمله‌ای

۱) برای ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای، باید هریک از جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب و، سپس، حاصل‌ضرب‌ها را باهم جمع کرد. مثلاً

$$(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=x(x^۲+xy+y^۲)-$$
$$-y(x^۲+xy+y^۲)=x^۳+x^۲y+xy^۲-x^۲y-xy^۲-y^۳$$

که باتوجه به جمله‌های متشابه، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=x^۳-y^۳$$

۲) تقسیم یک چندجمله‌ای، بر چندجمله‌ای دیگر، به معنای پیدا کردن چندجمله‌ای است که اگر آن را در بخش‌یاب (مقسوم‌علیه) ضرب کنیم، بخشی (مقسوم) به‌دست آید.

برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای، باید

a) بخشی و بخش‌یاب را برحسب توان‌های نزولی مجهول، منظم کرد؛

b) نخستین جملهٔ بخشی را بر نخستین جملهٔ بخش‌یاب تقسیم کرد (این، نخستین جملهٔ خارج‌قسمت است)؛

c) نخستین جملهٔ خارج‌قسمت را در بخش‌یاب ضرب و، نتیجهٔ ضرب را زیر بخشی نوشت؛

d) نتیجه‌ای را که زیر بخشی نوشته‌ایم، از بخشی کم می‌کنیم و تفاضل را، نخستین باقی‌مانده (یا باقی‌ماندهٔ اول) می‌نامیم. اگر این باقی‌مانده، برابر صفر شود، تقسیم تمام شده‌است. ولی اگر باقی‌ماندهٔ اول مخالف صفر و درجه‌ای بیشتر از درجهٔ بخش‌یاب داشته‌باشد، آن‌وقت؛

e) نخستین جملهٔ باقی‌ماندهٔ اول را، بر نخستین جملهٔ بخش‌یاب تقسیم می‌کنیم (تا جملهٔ دوم خارج‌قسمت به‌دست آید)؛

ادامهٔ کار، تکرار عمل‌هایی است که تا این‌جا، انجام دادیم. این عمل‌ها، باید تاجایی ادامه پیدا کند که یا باقی‌مانده‌ای برابر صفر به‌دست آید و یا، درجهٔ باقی‌مانده، از درجهٔ بخش‌یاب، کوچکتر شود. درحالت اول، چندجمله‌ای بخشی، بر چندجمله‌ای بخش‌یاب، بخش‌پذیر است؛ ولی درحالت دوم، بخشی بر بخش‌یاب بخش‌پذیر نیست و گویند، تقسیم همراه با باقی‌مانده است. در واقع، درحالت اخیر، دوباره با کسر جبری سروکار داریم.

اگر چندجمله‌ای‌ها، شامل دو یا چند متغیر باشند، آن‌وقت، باید یکی از متغیرها را، متغیر اصلی درنظر گرفت (و بهتر است، متغیری که از درجهٔ بالاتری است) و بقیه را به‌عنوان ضریب به‌حساب آورد. تقسیم این‌گونه چندجمله‌ای‌ها (که ضریب‌های حرفی دارند) بر یکدیگر، طبق همان قاعده‌ای انجام می‌شود که در بالا آوردیم.

مثال ۱. نتیجهٔ این دو تقسیم را پیدا کنید:

$$1)\ (28a^7 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^3) : (7a^4 + 5a^3 - 3a^2)$$

$$2)\ (27x^5 - 81x^4y + 75x^3y^2 - 20x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5) :$$
$$: (3x^3 - 7x^2y + 5xy^2 - 2y^3)$$

حل. بخشی و بخش‌یاب، در تقسیم اول، برحسب توان‌های نزولی a، و در تقسیم دوم، برحسب توان‌های نزولی x، منظم شده‌اند. بقیهٔ عمل‌ها را طبق قاعده، انجام می‌دهیم.

$$
\begin{array}{rl|l}
1) & 28a^7 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^3 & 7a^4 + 5a^3 - 3a^2 \\ \cline{3-3}
 & \mp 28a^7 \mp 20a^6 \pm 12a^5 & 4a^3 - 2a^2 + a \\ \cline{1-2}
 & -14a^6 - 3a^5 + 11a^4 - 3a^3 & \\
 & \pm 14a^6 \pm 10a^5 \mp 6a^4 & \\ \cline{1-2}
 & 7a^5 + 5a^4 - 3a^3 & \\
 & \mp 7a^5 \mp 5a^4 \pm 3a^3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

این نتیجه را، به یکی از دو صورت زیر، می‌توان نوشت:

$$۲۸a^۷ + ۶a^۶ - ۱۵a^۵ + ۱۱a^۴ - ۳a^۳ =$$

$$= (۷a^۴ + ۵a^۳ - ۳a^۲)(۴a^۳ - ۲a^۲ + a);$$

$$\frac{۲۸a^۷ + ۶a^۶ - ۱۵a^۵ + ۱۱a^۴ - ۳a^۳}{۷a^۴ + ۵a^۳ - ۳a^۲} = ۴a^۳ - ۲a^۲ + a$$

$$
\begin{array}{l|l}
۲۷x^۵ - ۸۱x^۴y + ۷۵x^۳y^۲ - ۲۰x^۲y^۳ - ۸xy^۴ + ۸y^۵ & ۳x^۳ - ۷x^۲y + ۵xy^۲ - ۲y^۳ \\
\cline{2-2}
\mp ۲۷x^۵ \pm ۶۳x^۴y \mp ۴۵x^۳y^۲ \pm ۱۸x^۲y^۳ & ۹x^۲ - ۶xy - ۴y^۲ \\
\cline{1-1}
\quad - ۱۸x^۴y + ۳۰x^۳y^۲ - ۲x^۲y^۳ - ۸xy^۴ + ۸y^۵ & \\
\quad \pm ۱۸x^۴y \mp ۴۲x^۳y^۲ \pm ۳۰x^۲y^۳ \mp ۱۲xy^۴ & \\
\cline{1-1}
\qquad - ۱۲x^۳y^۲ + ۲۸x^۲y^۳ - ۲۰xy^۴ + ۸y^۵ & \\
\qquad \pm ۱۲x^۳y^۲ \mp ۲۸x^۲y^۳ \pm ۲۰xy^۴ \mp ۸y^۵ & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad ۰ &
\end{array}
$$

که به یکی از این دو صورت، نوشته می‌شود:

$$۲۷x^۵ - ۸۱x^۴y + ۷۵x^۳y^۲ - ۲۰x^۲y^۳ - ۸xy^۴ + ۸y^۵ =$$

$$= (۳x^۳ - ۷x^۲y + ۵xy^۲ - ۲y^۳)(۹x^۲ - ۶xy - ۴y^۲);$$

$$\frac{۲۷x^۵ - ۸۱x^۴y + ۷۵x^۳y^۲ - ۲۰x^۲y^۳ - ۸xy^۴ + ۸y^۵}{۳x^۳ - ۷x^۲y + ۵xy^۲ - ۲y^۲} =$$

$$= ۹x^۲ - ۶xy - ۴y^۲$$

مثال ۲. انجام عمل تقسیم در هریک از سه نمونه زیر، به چه نتیجه‌هایی می‌رسد؟

$$۱)\ (x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz) : (x + y + z);$$

$$۲)\ (۲x^۳ + ۳x^۲ - ۷x + ۱) : (۲x - ۱);$$

$$۳)\ (x^۴y^۴ + z^۴) : (xy - z)$$

حل. ۱) ابتدا باید بخشی و بخش‌یاب را برحسب توان‌های نزولی یکی

از متغیرها، و مثلاً x، منظم کنیم:

$$\text{بخشی} = x^{۳} + ۰x^{۲} - ۳yzx + (y^{۳} + z^{۳});$$

$$\text{بخشیاب} = x + (y + z)$$

در بخشی، جملهٔ $۰x^{۲}$ را، برای ردیف بودن توان‌های x و پیش‌گیری از اشتباه، اضافه کردیم. البته، وارد نکردن این جمله هم، مشکلی ایجاد نمی‌کرد.

از تقسیم $x^{۳}$ بر x، نخستین جملهٔ خارج‌قسمت، یعنی $x^{۲}$ به‌دست می‌آید. از ضرب $x^{۲}$ در دو جملهٔ بخش‌یاب ($y + z$ را، یک جمله به‌حساب می‌آوریم و، به‌همین جهت آن را داخل پرانتز نوشته‌ایم)، نتیجه می‌شود:

$$x^{۳} + (y + z)x^{۲}$$

که اگر آن را از بخشی کم کنیم، باقی‌ماندهٔ اول پیدا می‌شود:

$$-(y + z)x^{۲} - ۳yzx + y^{۳} + z^{۳}$$

از تقسیم $-(y+z)x^{۲}$ بر x، دومین جملهٔ خارج‌قسمت، یعنی $-(y+z)x$ پیدا می‌شود و از ضرب آن در بخش‌یاب، به‌دست می‌آید.

$$-(y + z)x^{۲} - (y + z)(y + z)x$$

و یا

$$-(y + z)x^{۲} - (y^{۲} + z^{۲} + ۲yz)x$$

آن را از باقی‌ماندهٔ اول کم می‌کنیم، تفاضل چنین است:

$$(y^{۲} + z^{۲} - yz)x + y^{۳} + z^{۳}$$

از تقسیم نخستین جملهٔ باقی‌ماندهٔ دوم بر x به‌دست می‌آید:

$$y^{۲} + z^{۲} - yz$$

که جملهٔ سوم خارج‌قسمت است. آن را در بخش‌یاب ضرب می‌کنیم.

$$(y^2 + z^2 - yz)x + (y^2 + z^2 - yz)(y + z)$$

ویا اگر پرانتزهای آخر را در هم ضرب کنیم.

$$(y^2 + z^2 - yz)x + y^3 + z^3$$

جملهٔ سوم خارج‌قسمت برابر y^2+z^2-yz می‌شود که، اگر حاصل‌ضرب آن را در بخش‌یاب، از باقی‌ماندهٔ دوم کم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر صفر به‌دست می‌آید. بنابراین، تقسیم بدون باقی‌مانده است:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x + y + z} = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz;$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

۲) انجام عمل تقسیم دشوار نیست، ولی تقسیم، باقی‌مانده دارد. باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر $-\frac{3}{2}$ و خارج‌قسمت برابر است با

$$x^2 + 2x - \frac{5}{2}$$

یعنی با یک کسر جبری سروکار داریم و می‌توان نتیجهٔ تقسیم را این‌طور نوشت:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{2x - 1} = x^2 + 2x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2(2x - 1)};$$
$$2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 =$$
$$= (2x - 1)(x^2 + 2x - \frac{5}{2}) - \frac{3}{2}$$

۳) این تقسیم هم، دارای باقی‌مانده است:

$$\frac{x^۴y^۴+z^۴}{xy-z}=x^۳y^۳+x^۲y^۲z+xyz^۲+z^۳+\frac{۲z^۴}{xy-z};$$
$$x^۴y^۴+z^۴=$$
$$=(xy-z)(x^۳y^۳+x^۲y^۲z+xyz^۲+z^۳)+۲z^۴$$

§۳. کسر جبری

نسبت دو چندجمله‌ای را، کسر جبری گویند. اگر درجهٔ چندجمله‌ای صورت، از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج، کوچکتر باشد، کسر را **تحقیقی** و، اگر درجهٔ چندجمله‌ای صورت با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج، برابر یا از آن بزرگتر باشد، کسر را غیر تحقیقی گویند.

همان‌طور که، اندکی قبل در مثال ۲ (مساله‌های ۲) و ۳)) دیدیم، هر کسر غیرتحقیقی را می‌توان به مجموع یک چندجمله‌ای با یک کسر تحقیقی تبدیل کرد. کسرهای

$$\frac{۲}{x};\ \frac{x+۲}{x^۲+۳};\ \frac{xy-۱}{x^۳+y^۲-x}$$

تحقیقی و کسرهای

$$\frac{x^۳-۱}{x+۱};\ \frac{x^۲y-x+۵}{x+y},\ \frac{x^۳+y^۳+۱}{x+y+۱}$$

غیر تحقیقی‌اند (شبیه کسرهای متعارفی بزرگتر از واحد، که می‌شد آن‌ها را، به مجموع یک عدد درست و یک عدد کسری تبدیل کرد). درحالت خاصی که، صورت کسر بر مخرج آن، بخش‌پذیر باشد، کسر جبری، به یک چندجمله‌ای و بدون بخش کسری، تبدیل می‌شود.

عمل روی کسرهای جبری، شبیه عمل روی کسرهای متعارفی عددی انجام می‌گردد.

البته، برای ساده کردن کسر جبری و، همچنین، برای تبدیل چند کسر جبری به یک مخرج (وقتی بخواهیم آن‌ها را باهم جمع یا از هم کم کنیم)، باید با قانون‌های مربوط به **تجزیه چندجمله‌ای‌ها** آشنا باشیم که در فصل بعد، به آن خواهیم پرداخت. در این‌جا، چند مثال ساده، برای عمل روی کسرهای جبری می‌آوریم:

$$۱)\ \frac{۲}{x+۲}+\frac{x}{x+۲}=\frac{۲+x}{x+۲}=۱;$$

$$۲)\ \frac{x}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{x(x-۱)-(x+۱)}{(x+۱)(x-۱)}=$$

$$=\frac{x^{۲}-x-x-۱}{x^{۲}-x+x-۱}=\frac{x^{۲}-۲x-۱}{x^{۲}-۱};$$

$$۳)\ \frac{x+۱}{x-۱}\times\frac{x-۱}{x^{۲}+۱}=\frac{(x+۱)(x-۱)}{(x-۱)(x^{۲}+۱)}=\frac{x+۱}{x^{۲}+۱};$$

$$۴)\ \frac{x^{۲}+۱}{x}:\frac{x+۱}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}+۱}{x}\times\frac{x^{۲}}{x+۱}=$$

$$=\frac{(x^{۲}+۱)x^{۲}}{x(x+۱)}=\frac{x(x^{۲}+۱)}{x+۱}$$

عبارت‌های گویا. هر جمله یا هر چندجمله‌ای و یا نسبت دوجمله‌ای (یعنی کسر جبری) را، یک عبارت جبری ویا، دقیق‌تر، **عبارت جبری گویا** گویند.

عبارت جبری، وقتی گویا است که تنها شامل عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و توان (با نمای درست)، بین چندجمله‌ای‌ها باشد. در این‌جا،

چند نمونه، از عبارت‌های جبری گویا را آورده‌ایم:

$$۲ab;\ x\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}y;\ \frac{x+y}{z\sqrt{۵}},\ (۲-x)^{۴}$$

ولی عبارت‌های جبری

$$۲a\sqrt{b};\ \sqrt{x}+\frac{z}{۲};\ \frac{x+y}{۵\sqrt{z}};\ (۲-x)^{\frac{۱}{۲}}$$

گویا نیستند.

توجه کنید: $۲a\sqrt{b}$، نسبت به a گویا و نسبت به b گنگ است؛
$\sqrt{x}+\frac{z}{۲}$، نسبت به x گنگ و نسبت به z گویا است؛
$\frac{x+y}{۵\sqrt{z}}$، نسبت به x و y گویا و نسبت به z گنگ است؛
$(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}$، نسبت به x گنگ است.

۴§. اتحادهای جبری

اتحاد، به‌معنای «یکی بودن» است. وقتی می‌نویسیم $۵=۵$، یا می‌نویسیم $x=۲x-۳x$، با یک اتحاد سروکار داریم، زیرا دو طرف برابری، دو مقدار متفاوت نیست. همچنین، اگر حاصل‌ضرب

$$(x^{۲}+x-۱)(x^{۲}-x+۱)$$

را پیدا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x^{۲}+x-۱)(x^{۲}-x+۱)=x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}+x^{۳}-$$
$$-x^{۲}+x-x^{۲}+x-۱=x^{۴}-x^{۲}+۲x-۱$$

بنابراین، برابری

$$(x^{۲}+x-۱)(x^{۲}-x+۱)=x^{۴}-x^{۲}+۲x-۱$$

یک اتحاد است، زیرا دوطرف برابری، معرف یک مقدارند: طرف دوم، نتیجه‌ای است از طرف اول.

ضمن ضرب (و همچنین تقسیم) چندجمله‌ای‌ها، اغلب به‌گونه‌هایی برخورد می‌کنیم که، به‌دلیل تکرار فراوان آن‌ها در موردهای مختلف، بهتر است، از قبل و برای یکبار، نتیجه ضرب (یا تقسیم) را، به‌صورت یک «دستور» منظم کنیم تا، هربار، ناچار به انجام عمل ضرب (یا تقسیم) نباشیم. این دستورها، به‌عنوان مهم‌ترین اتحادها، در ذهن ما می‌مانند و هرجا با نمونه‌هایی شبیه آن‌ها روبه‌رو شدیم، بدون انجام عمل‌های خسته‌کننده و طولانی، نتیجه را می‌نویسیم.

اما، پیش از آنکه، به کشف این «دستورها» بپردازیم، به نکته‌ای اشاره می‌کنیم که، برای تحقیق در «اتحاد بودن» یا «اتحاد نبودن» یک برابری، اهمیت دارد.

بارها به برابری از نوع $x^۲ - x = ۲$ برخورده‌اید. آیا، این برابری، یک اتحاد است. روشن است که پاسخ، منفی است. این، یک **معادله** است نه یک اتحاد.

معادله و اتحاد، هردو به‌یاری نماد برابری (=) نشان داده می‌شوند، ولی تفاوت عمده‌ای باهم دارند:

در اتحاد، چون دوطرف برابری، معرف یک مقدار هستند، باید هر عدد حقیقی دلخواهی، به‌جای حرف یا حرف‌ها قرار دهیم، در دوطرف برابری، دو عدد برابر به‌دست آید. درحالی که در معادله، تنها می‌توان جواب (یا ریشهٔ) معادله را به‌جای حرف یا حرف‌ها قرار داد تا دو طرف برابر شوند.

$x^۲ - x = ۲$ یک معادله است، زیرا به‌جای x، تنها می‌توان یکی از دو عدد ۱− یا ۲ را قرار داد تا مقدار سمت چپ برابری، برابر ۲ شود.

$x^۲ - x = x(x - ۱)$، یک اتحاد است، زیرا به‌جای x، هر عدد دلخواهی قرار دهید، دوطرف برابری، باهم برابر درمی‌آیند.

اگر حتی یک عدد پیدا شود که نتواند، دوطرف برابری را، برابر کند، به‌معنای آن است که، این برابری، اتحاد نیست.

مهم‌ترین اتحادها.

۱) مجذور یک دوجمله‌ای. دوجمله‌ای را، درحالت کلی، می‌توان بصورت $a+b$ یا $a-b$ نوشت. باتوجه به قانون ضرب دو چندجمله‌ای، داریم:

$$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) =$$
$$= a^۲ + ab + ab + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲;$$
$$(a-b)^۲ = (a-b)(a-b) =$$
$$= a^۲ - ab - ab + b^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

بنابراین

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲;$$
$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

اتحاد دوم را می‌توانستیم به یاری اتحاد اول به‌دست آوریم.

$$(a-b)^۲ = [a+(-b)]^۲ = a^۲ + ۲a(-b) + (-b)^۲ =$$
$$= a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ (۲x+y)^۲; \quad ۲)\ (۴a-۵b)^۲;$$
$$۳)\ (-x+۳y)^۲; \quad ۴)\ (a+b-c)^۲$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۱)\ (۲x+y)^۲ = (۲x)^۲ + ۲(۲x)y + y^۲ =$$

$$= ۴x^۲ + ۴xy + y^۲;$$

$$۲)\ (۴a - ۵b)^۲ = (۴a)^۲ - ۲(۴a)(۵b) + (۵b)^۲ =$$

$$= ۱۶a^۲ - ۴۰ab + ۲۵b^۲;$$

$$۳)\ (-x + ۳y)^۲ = (-x)^۲ + ۲(-x)(۳y) + (۳y)^۲ =$$

$$= x^۲ - ۶xy + ۹y^۲$$

یادداشت. $(-x + ۳y)^۲$ با $(x - ۳y)^۲$ فرق ندارد، زیرا مجذور دو عدد قرینه، یکی است:

$$(-x + ۳y)^۲ = (x - ۳y)^۲ = x^۲ - ۶xy + ۹y^۲$$

۴) $b - c$ را یک جمله فرض می‌کنیم و آن را در داخل پرانتز می‌گذاریم:

$$(a + b - c)^۲ = [a + (b - c)]^۲ =$$

$$= a^۲ + ۲a(b - c) + (b - c)^۲ =$$

$$= a^۲ + ۲ab - ۲ac + b^۲ - ۲bc + c^۲$$

اتحادهای مربوط به مجذور دوجمله‌ای، می‌توانند برای محاسبهٔ ذهنی مجذور بعضی عددها، مورداستفاده قرار گیرند:

$$۴۱^۲ = (۴۰ + ۱)^۲ = ۱۶۰۰ + ۸۰ + ۱ = ۱۶۸۱;$$

$$۳۹^۲ = (۴۰ - ۱)^۲ = ۱۶۰۰ - ۸۰ + ۱ = ۱۵۲۱$$

۲) ضرب دو جملهٔ مزدوج. ابتدا با یک تعریف آشنا شویم.

تعریف. *دو عبارت جبری دوجمله‌ای را، مزدوج یکدیگر گویند، وقتی که، یکی از جمله‌های آن‌ها باهم برابر، و جملهٔ دیگرشان، نسبت به‌هم، قرینه باشند.*

دوجمله‌ای $a+b$ را درنظر می‌گیریم. این دوجمله‌ای، دو مزدوج دارد: $a-b$ و $-a+b$. همچنین، دوجمله‌ای $x-y$، دارای دو مزدوج است: $x+y$ و $-x-y$.

اکنون ببینیم، حاصل‌ضرب دوجمله‌ای‌های مزدوج، به چه نتیجه می‌رسد:

$$(a+b)(a-b)=a^۲-ab+ab-b^۲$$

و یا پس از ساده کردن

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

مثال. به‌یاری ضرب دو عبارت مزدوج، حاصل را بنویسید:

۱) $(۳x-y)(۳x+y)$؛ ۲) $(\frac{۱}{۲}a+b)(\frac{۱}{۲}a-b)$؛

۳) $(-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y^۲)(\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۲}y^۲)$؛

۴) $(a+b+c)(a+b-c)$

حل.

$$۱)\ (۳x-y)(۳x+y)=(۳x)^۲-y^۲=۹x^۲-y^۲;$$

$$۲)\ (\frac{۱}{۲}a+b)(\frac{۱}{۲}a-b)=(\frac{۱}{۲}a)^۲-b^۲=\frac{۱}{۴}a^۲-b^۲;$$

$$۳)\ (-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y^۲)(\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y^۲)=$$

$$=(\frac{۱}{۲}y^۲)^۲-(\frac{۳}{۲}x)^۲=\frac{۱}{۴}y^۴-\frac{۹}{۴}x^۲;$$

۴) در این‌جا، اگر $(a+b)$ را یک جمله و c را جملهٔ دوم به‌حساب آوریم، به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$(a+b+c)(a+b-c)=[(a+b)+c][(a+b)-c]=$$

$$=(a+b)^۲-c^۲=a^۲+۲ab+b^۲-c^۲$$

از دستور اتحادی مربوط به ضرب دو عبارت مزدوج هم، می‌توان برای محاسبه‌های ذهنی عددهای استفاده کرد:

$$۴۲ \times ۳۸ = (۴۰ + ۲)(۴۰ - ۲) =$$
$$= ۴۰^۲ - ۲^۲ = ۱۶۰۰ - ۴ = ۱۵۹۶;$$

۳) مجذور یک چندجمله‌ای. شبیه مثالی که برای $(a + b - c)^۲$ حل کردیم، می‌توان با گروه‌بندی جمله‌ها، مجذور هر چندجمله‌ای را به‌دست آورد:

$$(a - b - c + d)^۲ = [(a - b) - (c - d)]^۲ =$$
$$= (a - b)^۲ - ۲(a - b)(c - d) + (c - d)^۲ =$$
$$= a^۲ - ۲ab + b^۲ - ۲ac + ۲ad + ۲bc - ۲bd +$$
$$+c^۲ - ۲cd + d^۲$$

نتیجه را به‌این صورت می‌نویسیم (اول مجذورهای کامل و بعد دوبرابر حاصل‌ضرب‌ها):

$$(a - b - c + d)^۲ =$$
$$= a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ - ۲ab - ۲ac + ۲ad +$$
$$+۲bc - ۲bd - ۲cd$$

که این قاعده را، برای مجذور یک چندجمله‌ای، به ما تلقین می‌کند:

الف) مجذور همهٔ جمله‌ها را، با علامت مثبت (جمع) به‌دنبال یکدیگر می‌نویسیم؛

ب) دوبرابر جملهٔ اول را در هریک از جمله‌های بعد از خود، با رعایت علامت، می‌آوریم؛

پ) بعد، دوبرابر جملهٔ دوم را درهریک از جمله‌های بعد از خود، بازهم با رعایت علامت، می‌نویسیم؛

ت) این عمل، یعنی ضرب دوبرابر هر جمله، در هریک از جمله‌های بعد از خودش را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که دیگر، جمله‌ای باقی نماند:

$$(۲x + y - ۳z + t - ۵s)^۲ =$$
$$= ۴x^۲ + y^۲ + ۹z^۲ + t^۲ + ۲۵s^۲ + ۴xy - ۱۲xz +$$
$$+ ۴xt - ۲۰xs - ۶yz + ۲yt - ۱۰ys -$$
$$- ۶zt + ۳۰zs - ۱۰ts$$

۴) ضرب دو عبارت دوجمله‌ای که در یک جمله مشترک‌اند. دوجمله‌ای‌های $x + a$ و $x + b$، در جملهٔ اول خود، یعنی x، مشترک و در جمله‌های دوم خود، یعنی a و b، با هم اختلاف دارند. اگر آن‌ها را در هم ضرب کنیم:

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + ax + bx + ab$$

و مجموع دو جملهٔ متشابه ax و bx را به‌صورت $(a + b)x$ بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$$

حاصل ضرب دو عبارت دوجمله‌ای، که دریک جمله مشترک‌اند، برابر است با یک سه‌جمله‌ای: جملهٔ اول این سه‌جمله‌ای، مجذور جملهٔ مشترک، جملهٔ دوم آن، حاصل‌ضرب مجموع دو جملهٔ غیرمشترک در جملهٔ مشترک؛ و جملهٔ سوم آن، حاصل‌ضرب دو جملهٔ غیر مشترک است.

مثال ۱. این حاصل‌ضرب‌ها را، بدون انجام عمل ضرب، پیدا کنید:

$$۱)\ (a + ۳)(a - ۲); \qquad ۲)\ (۲x + ۱)(۲x - ۴);$$

$$۳)\ (x+a+b)(x+a-b);$$

$$۴)\ (۵x^۲y-۳x+۱)(۵x^۲y+۴x-۱)$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۱)\ (a+۳)(a-۲)=a^۲+(۳-۲)a+۳(-۲)=$$
$$=a^۲+a-۶;$$
$$۲)\ (۲x+۱)(۲x-۴)=(۲x)^۲+(۱-۴)(۲x)+۱(-۴)=$$
$$=۴x^۲-۶x-۴;$$
$$۳)\ (x+a+b)(x+a-b)=x^۲+[(a+b)+(a-b)]x+$$
$$+(a+b)(a-b)=x^۲+۲ax+a^۲-b^۲;$$
$$۴)\ (۵x^۲y-۳x+۱)(۵x^۲y+۴x-۱)=$$
$$=(۵x^۲y)^۲+[(-۳x+۱)+(۴x-۱)](۵x^۲y)+$$
$$+(-۳x+۱)(۴x-۱)=$$
$$۲۵x^۴y^۲+۵x^۳y-۱۲x^۲+۷x-۱$$

مثال ۲. این ضرب‌ها را، در ذهن خود، انجام دهید:

$$۱)\ ۴۱\times۴۳;\qquad ۲)\ ۴۲\times۳۷$$

حل.

$$۱)\ ۴۱\times۴۳=(۴۰+۱)(۴۰+۳)=$$
$$=۴۰^۲+(۱+۳)\times۴۰+۱\times۳=$$
$$=۱۶۰۰+۱۶۰+۳=۱۷۶۳;$$
$$۲)\ ۴۲\times۳۷=(۴۰+۲)(۴۰-۳)=$$

$$= ۴۰^{۲} + (۲ - ۳) \times ۴۰ + ۲ \times (-۳) =$$
$$= ۱۶۰۰ - ۴۰ - ۶ = ۱۵۵۴$$

۵) مکعب یک دوجمله‌ای. با ضرب مستقیم، می‌توان این دو اتحاد را به‌دست آورد:

$$(a+b)^{۳} = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳};$$
$$(a-b)^{۲} = a^{۳} - ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} - b^{۳}$$

که اگر طرف‌های دوم را، اندکی تغییر دهیم و به‌صورت زیر بنویسیم، هم به‌خاطر سپردن آن‌ها ساده‌تر می‌شود و هم، در حل مساله‌ها، کاربرد بیشتری دارد:

$$(a+b)^{۳} = a^{۳} + b^{۳} + ۳ab(a+b);$$
$$(a-b)^{۳} = a^{۳} - b^{۳} - ۳ab(a-b)$$

دو مثال.

$$۱)\ (۲x-۱)^{۳} = (۲x)^{۳} - ۳(۲x)^{۲} \times ۱ + ۳(۲x) \times ۱^{۲} + (-۱)^{۳} =$$
$$= ۸x^{۳} - ۱۲x^{۲} + ۶x - ۱$$
$$۲)\ (a^{۲} + b - ۱)^{۳} = [a^{۲} + (b-۱)]^{۳} =$$
$$= (a^{۲})^{۳} + ۳(a^{۲})^{۲}(b-۱) + ۳a^{۲}(b-۱)^{۲} + (b-۱)^{۳} =$$
$$= a^{۶} + ۳(b-۱)a^{۴} + ۳(b-۱)^{۲}a^{۲} + (b-۱)^{۳}$$

(که نسبت به توان‌های نزولی a، منظم است. البته، اگر بخواهیم، پرانتزها را باز کنیم، دشواری عمده‌ای وجود ندارد.)

۶) سه اتحاد دیگر. این اتحادها هم، با ضرب مستقیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})=a^{۳}+b^{۳};$$
$$(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳};$$
$$(a+b+c)(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-ac-bc)=$$
$$=a^{۳}+b^{۳}+c^{۴}-۳abc$$

این اتحاد آخری را، پیش از این و ضمن تقسیم $x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz$ بر $x+y+z$، به‌دست آورده‌ایم.

دو اتحاد دیگر را هم، می‌توان با تقسیم $a^{۳}+b^{۳}$ بر $a+b$ و تقسیم $a^{۳}-b^{۳}$ بر $a-b$ پیدا کرد:

$$\frac{a^{۳}+b^{۳}}{a+b}=a^{۲}-ab+b^{۲}, a\neq -b;$$
$$\frac{a^{۳}-b^{۳}}{a-b}=a^{۲}+ab+b^{۲}, a\neq b$$

مثال. خارج‌قسمت‌ها را، بدون عمل تقسیم، بنویسید:

$$۱)\ \frac{۸x^{۳}-y^{۳}}{۲x-y};\qquad ۲)\ \frac{۲۷m^{۳}+۶۴n^{۳}}{۳m+۴n};$$
$$۲)\ \frac{x^{۹}+y^{۶}}{}x^{۳}+y^{۲};\qquad ۴)\ \frac{a^{۳}+۸b^{۳}+c^{۳}-۶abc}{a+۲b+c}$$

حل. باتوجه به سه اتحاد اخیر، می‌توان خارج‌قسمت‌ها را نوشت. تنها در همه‌جا، باید شرط کرد که مخرج برابر صفر نباشد.

$$۱)\ \frac{۸x^{۳}-y^{۳}}{۲x-y}=\frac{(۲x)^{۳}-y^{۳}}{۲x-y}=۴x^{۲}+۲xy+y^{۲};$$

$$۲)\ \frac{۲۷m^۳ + ۶۴n^۳}{۳m + ۴n} = \frac{(۳m)^۳ + (۴n)^۳}{(۳m) + (۴n)} =$$
$$= ۹m^۲ - ۱۲mn + ۱۶n^۲;$$
$$۳)\ \frac{x^۹ + z^۶}{x^۳ + y^۲} = \frac{(x^۳)^۳ + (y^۲)^۳}{(x^۳) + (y^۲)} = x^۶ - x^۳y^۲ + y^۴;$$
$$۴)\ \frac{a^۳ + ۸b^۳ + c^۳ - ۶abc}{a + ۲b + c} = \frac{a^۳ + (۲b)^۳ + c^۳ - ۳a(۲b)c}{a + (۲b) + c} =$$
$$= a^۲ + ۴b^۲ + c^۲ - ۲ab - ac - ۲bc$$

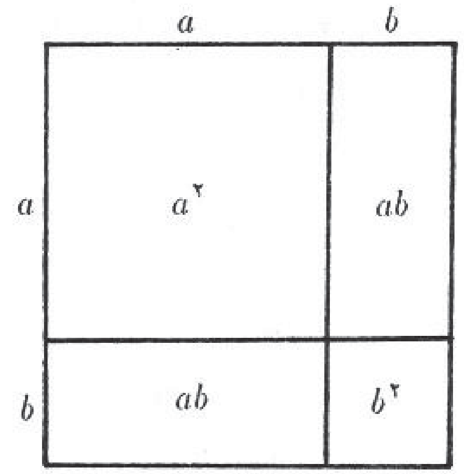
§۵. اتحادها در طول تاریخ.

ریاضی‌دانان یونان باستان و سپس، ریاضی‌دانان ایرانی، مفهوم اتحاد را می‌شناختند و از آن استفاده می‌کردند. فیثاغورث، ریاضی‌دان یونانی که در سدهٔ ششم پیش از میلاد می‌زیست، ضمن بررسی رابطه‌ای که بین ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد، یک رشته اتحاد به‌دست آورد. البته، استدلال‌های فیثاغورث و دیگر ریاضی‌دانان یونانی (و همچنین ریاضی‌دانان ایرانی بعد از آن‌ها)، بیشتر براساس استفاده از شکل‌های هندسی بود.

در سدهٔ سوم پیش از میلاد، اقلیدس، هندسه‌دان بزرگ یونانی، کتاب خود را به‌نام «مقدمات» نوشت که شامل ۱۳ مقاله بود. مقالهٔ دوم این کتاب، به اتحادهای جبری اختصاص دارد که، البته، با استدلال‌ها و تعبیرهای هندسی آورده‌است. مثلاً در مسالهٔ دهم مقالهٔ دوم از کتاب خود درستی اتحاد

$$(a + b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

را ثابت کرده است. او می‌نویسد: «اگر پاره‌خط راستی را، به دو بخش تقسیم کنیم، آن‌وقت مربعی که روی تمامی این پاره‌خط راست ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مربع‌هایی که روی هر کدام از بخش‌ها ساخته شده و



شکل ۲۳

دوبرابر مستطیلی که روی بخش‌ها ساخته می‌شود». درشکل ۲۳، به‌روشنی دیده می‌شود که مساحت مربع به ضلع $a + b$، برابر است با مجموع چهار مساحت: مساحت مربع به ضلع a، مساحت مربع به ضلع b و مساحت‌های دو مستطیل برابر، با بُعدهای a و b.

دیوفانت، ریاضی‌دان دیگر یونانی که در سدهٔ دوم میلادی در مکتب ریاضی اسکندریه کار می‌کرد، در کتاب «حساب» خود، این اتحادها را ثابت کرد:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

خوارزمی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی هم، برخی از اتحادهای جبری را مطرح و اثبات کرده‌است (در کتاب «حساب» خود. اصل این کتاب تاکنون پیدا نشده‌است، ولی ترجمهٔ لاتینی آن وجود دارد).

نمادهایی که امروز، برای اتحادهای جبری به‌کار می‌بریم، بیش از همه، کار دو ریاضی‌دان فرانسوی، یعنی «ویت» و «دکارت»، است.

□

* بنابه‌قضیهٔ‌فیثاغورث، اگر دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه را در مثلث قائم‌الزاویه، به طول‌های a و b و وتر آن را به طول c فرض کنیم، همیشه این رابطه برقرار است:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

اتحادی وجود دارد که، به‌یاری آن، می‌توان مثلث‌های فیثاغوری را (یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را که طول ضلع‌های آن‌ها، با عددهای طبیعی بیان می‌شود)، پیدا کرد. این اتحاد، که از همان دوران باستان شناخته‌شده بود، چنین است:

$$(m^۲ - n^۲)^۲ + (۲mn)^۲ = (m^۲ + n^۲)^۲$$

(آزمایش کنید تا به درستی این اتحاد قانع شوید).

بنابراین، اگر m و n $(m > n)$ را دو عدد طبیعی دلخواه بگیریم، آن‌وقت مثلث فیثاغوری با ضلع‌های a و b و c، به‌دست می‌آید:

$$a = m^۲ - n^۲, b = ۲mn, c = m^۲ + n^۲$$

چند نمونه از مثلث‌های فیثاغوری را می‌آوریم.

۱) برای $m = ۲$ و $n = ۱$ به‌دست می‌آید:

$$a = ۳, b = ۴, c = ۵$$

۲) برای $m = ۳$ و $n = ۲$:

$$a = ۵, b = ۱۲, c = ۱۳$$

۳) به‌ازای $m = ۴$ و $n = ۱$:

$$a = ۱۵, b = ۸, c = ۱۷$$

۴) به‌ازای $m = ۴$ و $n = ۳$:

$$a = ۷, b = ۲۴, c = ۲۵$$

۵) برای $m = ۱۰$ و $n = ۱$:

$$a = ۹۹, b = ۲۰, c = ۱۰۱$$

۶) برای $m = ۱۰$ و $n = ۷$:

$$a = ۵۱, b = ۱۴۰, c = ۱۴۹$$

§۶. چند یادآوری مهم

در برخی کتاب‌های ریاضی، و حتی کتاب‌های درسی، از اصطلاح‌ها و نام‌گذاری‌هایی استفاده می‌شود که می‌توانند موجب اشتباه و یا گمراهی شوند. به‌طور کلی، توصیهٔ ما این است که در بیان مفهوم‌های ریاضی، کوشش کنید، جمله را کامل بیان کنید؛ درضمن، از جمله‌ای استفاده کنید که مضمون ریاضی مفهوم را به‌درستی نشان دهد. مثلاً در محاسبهٔ کسر مرکب $\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۲}{۵}}$، هرگز از اصطلاح بی‌معنی (ولی رایج) «دور در دور، نزدیک در نزدیک» استفاده نکنید، زیرا به‌شما نشان نمی‌دهد که با کدام عمل ریاضی سروکار دارید. بیان خود را کامل و به‌صورتی که معرف یک عمل ریاضی باشد، ارائه دهید. بگویید: «برای تقسیم کسر $\frac{۳}{۴}$ بر کسر $\frac{۲}{۵}$، باید بخش‌یاب یعنی $\frac{۲}{۵}$ را معکوس و، سپس، در بخشی، یعنی $\frac{۳}{۴}$ ضرب کرد». یا وقتی با معادله‌ای سروکار دارید، نگویید «معلوم مجهول می‌کنیم»، زیرا اولاً این جمله در زبان فارسی هیچ معنایی ندارد (مگر می‌شود، معلوم را مجهول کرد)، ثانیاً معرف هیچ عمل ریاضی نیست. جمله را کامل بیان کنید و بگوئید «معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به‌طرف دیگر منتقل می‌کنیم». و اما دربارهٔ اتحادها:

۱) در این کتاب، آگاهانه، اتحادها را شماره‌گذاری نکرده‌ایم. بسیار دیده شده‌است که، دانش‌آموزان، وقتی می‌خواهند، از اتحادی نام ببرند، مثلاً می‌گویند «اتحاد سوم». درحالی که نویسندگان کتاب‌های ریاضی، برحسب سلیقهٔ خود، اتحادها را ردیف می‌کنند و، چه‌بسا، در دو کتاب مختلف، دو اتحاد متفاوت در ردیف سوم آمده‌باشد.

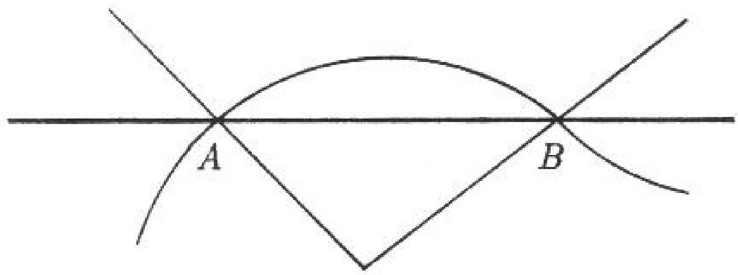
به‌جز این، برخی از دانش‌آموزان، با شماره‌دار بودن اتحادها، ممکن است به این اشتباه بیفتند که، تعداد اتحادها، محدود است و مثلاً، چون در این کتاب از ۱۰ اتحاد مهم نام برده‌ایم، گمان کنند، در جبر، ۱۰ اتحاد وجود دارد. درحالی‌که، همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، تعداد اتحادها، بی‌پایان است.

از این‌ها گذشته، بر این مطلب تاکید داریم که، برای درک بهتر مفهوم‌های ریاضیات، باید مضمون هر عمل یا هر رابطه را بیان کرد و از ذکر «نام‌های مستعار» پرهیز کرد.

۲) هرگز به اتحاد

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

نگویید: «اتحاد مزدوج». این، خودِ اتحاد نیست که «مزدوج» است، بلکه دو عبارت جبری $a+b$ و $a-b$ «مزدوج یکدیگرند. دیده شده‌است که، وقتی از دانش‌آموزی می‌پرسند: $(a^۲-b^۲)$ چیست؟ پاسخ می‌دهد «اتحاد مزدوج». درست دقت کنید، عبارت $a^۲-b^۲$، نه اتحاد است (زیرا برابری ندارد) و نه مزدوج (زیرا، برای مزدوج بودن، باید دو عبارت داشته‌باشیم که یکی مزدوج دیگری باشد). درواقع، $a^۲-b^۲$، یک عبارت جبری است یا یک دوجمله‌ای، یا اگر بخواهیم ماهیت آن را بهتر نشان دهیم، باید بگوییم «تفاضل دو مجذور کامل است». البته، می‌توان گفت: $a^۲-b^۲$ به ضرب دو عبارت مزدوج تبدیل می‌شود؛ یا $a^۲-b^۲$ از حاصل‌ضرب دو عبارت مزدوج



شکل ۲۴

$a + b$ و $a - b$ به‌دست آمده‌است.

به‌همین ترتیب، دربارهٔ اتحاد

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$$

نباید گفت «اتحاد جملهٔ مشترک»؛ ولی می‌توان گفت: «اتحادی که باتوجه به حاصل‌ضرب دو عبارت جبری که یک جملهٔ مشترک دارند، به‌دست آمده‌است».

ریاضیات، دانشی دقیق است و درمورد همهٔ رابطه‌ها، مفهوم‌ها، قضیه‌ها و مساله‌های آن، این «دقت»، اهمیت دارد. بنابراین، برای بیان هر موضوع ریاضی هم، باید «دقت» کنیم تا مطلبی را به اشتباه یا ناقص نگفته باشیم.

در کتاب درسی هندسه هم، گفته شده‌است: «از دو نقطه، تنها یک خط عبور می‌کند». ولی به شکل ۲۴ توجه کنید: از دو نقطهٔ A و B، سه «خط» گذشته است. درواقع، از دو نقطهٔ A و B، تعداد بی‌پایانی «خط» می‌گذرد که، البته، تنها یکی از آن‌ها، «خط راست» است. جملهٔ کتاب را باید به این‌صورت، اصلاح کرد:

«از هر دونقطه، تنها یک خط راست می‌گذرد».

ببینید، بی‌دقتی چه دشواری‌هایی ایجاد می‌کند. تنها یک واژهٔ «راست» که به‌دنبال واژهٔ «خط» بیاید، جمله را درست می‌کند، درحالی‌که بدون این واژه، جملهٔ کتاب، نادرست است.

۳) در بسیاری جاها، برای اتحاد، از نماد («≡») استفاده می‌کنند که، البته، نادرست نیست، ولی چیزی راهم حل نمی‌کند. به‌نظر ما، همان نماد برابری («=»)، می‌تواند هم برای معادله به‌کار رود و هم برای اتحاد. درواقع، برای تعریف اتحاد، مثلاً می‌گوییم: اتحاد، **یک** برابری است که به‌ازای هر مقدار دلخواه متغیر یا متغیرها، برقرار باشد.

عادت کنید، در ریاضیات، **آن‌چه لازم است**، بگویید و بنویسید، نه چیزی کمتر و نه چیزی بیشتر.

همچنین، در نوشتن عددهای دهدهی دوره‌ای، گاهی یک پاره‌خط راست افقی، بالای یک دورهٔ گردش می‌گذراند و مثلاً می‌نویسند:

$$\frac{۳}{۱۱} = ۰/۲۷۲۷۲۷\ldots = ۰/\overline{۲۷}$$

این شیوهٔ نوشتن در برخی موردها، ایجاد دشواری و ابهام می‌کند. می‌دانید وقتی بخواهیم عدد سه‌رقمی با یکان c، دهگان b و صدگان a را نشان دهیم، آن را به‌صورت $\overline{abc}$ می‌نویسیم (تا با abc، به‌معنای $a \times b \times c$ اشتباه نشود). اکنون، اگر درجایی به نماد $۰/\overline{abc}$ برخورد کنیم، دچار این ابهام می‌شویم که منظور رقم‌های a و b و c است یا دورهٔ گردش abc، کدام یک:

$$۰/\overline{abc} = \frac{a}{۱۰} + \frac{b}{۱۰۰} + \frac{c}{۱۰۰۰}$$

یا

$$۰/\overline{abc} = ۰/abcabcabc\ldots$$

بهتر است، همان‌طور که کم‌وبیش در جاهای دیگر هم معمول است، دوطرف دورهٔ گردش، پرانتز بگذاریم

$$\frac{۳}{۱۱} = ۰/(۲۷)$$

در این‌صورت $\overline{abc}$ ۰٫ با (abc) ۰٫ تفاوت پیدا می‌کند و ابهامی به‌وجود نمی‌آورد.

۴) چه ضمن نوشتن اتحادها و چه در جاهای دیگر، برای نوشتن یک چندجمله‌ای، درحالت عادی، چندجمله‌ای را نسبت به یکی از حرف‌ها برحسب توان‌های نزولی بنویسید، مگر این‌که شکل دیگری از نوشتن، برای به‌خاطر سپردن راحت‌تر باشد و یا در آن مورد خاص، کار عمل‌های شما را ساده‌تر کند.

تمرین‌ها

۲۰۴. ضرب کنید:

$$۱)\ (x^۳+ ۲x^۲ - x + ۳)(x^۳ - ۲x^۲ + x - ۳);$$

$$۲)\ (a + b)(a^۴ - a^۳b + a^۲b^۲ - ab^۳ + b^۴);$$

$$۳)\ (xy - t)(x^۳y^۳ + x^۲y^۲t + xyt^۲ + t^۳);$$

$$۴)\ (a + b - ۱)(a^۲ + b^۲ - ab + a + b + ۱);$$

$$۵)\ (a - b)(a^۶ + a^۵b + a^۴b^۲ + a^۳b^۳ + a^۲b^۴ + ab^۵ + b^۶);$$

$$۶)\ (x + ۱)(x + ۲)(x + ۳)$$

۲۰۵. تقسیم کنید:

$$۱)\ (۲x^۲ - x - ۳) : (x + ۱);$$

$$۲)\ \frac{۷۲a^۴b - ۱۲a^۳b^۲ + ۴a^۲b^۳ - ۲ab^۴}{۲ab};$$

$$۳)\ \frac{۲۸x^۷ + ۶x^۶ - ۱۵x^۵ + ۱۱x^۴ - ۳x^۳}{۷x^۴ + ۵x^۳ - ۳x^۲};$$

$$۴)\ \frac{۹x^۶ + ۹۹x^۵ + ۲۶x^۴ + ۳۴x^۳ + ۱۲x^۲}{۱۲x^۲ + ۴x}$$

$$۵)\ \frac{a^۶ - b^۶}{a - b}; \qquad ۶)\ \frac{a^۷ + b^۷}{a + b};$$
$$۷)\ \frac{x^۶ + y^۶}{x^۲ + y^۲}; \qquad ۸)\ \frac{x^۶ + y^۶}{x + y};$$

*۲۰۶. می‌دانیم $۱۰a^۲ + ۵ab - ۳b^۲ = ۰$ و $۹a^۲ - b^۲ \neq ۰$.
مطلوب است، محاسبهٔ

$$\frac{۲a - b}{۳a - b} + \frac{۵b - a}{۳a + b}$$

*۲۰۷. اگر x و y، عددهایی طبیعی باشند، کسر

$$A = \frac{x^۲ + x + ۱}{xy - ۱}$$

برابر با چه مقدارهای درستی می‌تواند باشد؟

*۲۰۸. ثابت کنید، به‌شرط $x + y + z + t = ۰$، داریم:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + t^۳ = ۳(xy - zt)(z + t)$$

*۲۰۹. حاصل عددی این عبارت را پیدا کنید:

$$P = ۳\frac{۱}{۱۱۷} \times ۴\frac{۱}{۱۱۹} - ۱\frac{۱۱۶}{۱۱۷} \times ۵\frac{۱۱۸}{۱۱۹} - \frac{۵}{۱۱۹}$$

*۲۱۰. نتیجهٔ عددی این عبارت را پیدا کنید:

$$M = ۷۰(۷۱^۹ + ۷۱^۸ + ۷۱^۷ + \ldots + ۷۱^۲ + ۷۲) + ۱$$

*۲۱۱. اگر x و y عددهایی طبیعی باشند، به‌ازای چه مقدارهایی از x و y، دست‌کم یکی از عددهای $x^۲ - ۲xy + ۲y^۲$ و $x^۲ + ۲xy + ۲y^۲$ بر ۵، بخش‌پذیر است؟

۲۱۲. به کمک دستورهای اتحادی، حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ (۵a - ۳b)^{۲}; \qquad ۲)\ \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y}\right)^{۲};$$

$$۳)\ \left(\frac{a+b}{۲} + \frac{c-d}{۳}\right)^{۲}; \quad ۳)\ (۲t - ۱)^{۳};$$

$$۵)\ (۳t + ۲)^{۳}; \qquad ۶)\ (x^{۲} + y^{۳})^{۳};$$

$$۷)\ (۲p + ۳q)(۲p - ۳q);$$

$$۸)\ (x^{۲} + xy + y^{۲})(x^{۲} - xy + y^{۲})$$

$$۹)\ (۲a - ۳b + c)(۲a + ۳b - c);$$

$$۱۰)\ (x - ۵)(x + ۲); \qquad ۱۱)\ (a + ۷)(a - ۳);$$

$$۱۲)\ (۴x + ۱۱)(۴x - ۹); \quad ۱۳)\ (xy + ۲a)(xy - ۳a);$$

$$۱۴)\ (x + ۲a - ۳)(x - a + ۴);$$

۲۱۳. حاصل عددی این توان‌ها و ضرب‌ها را، به‌صورت ذهنی، به‌دست آورید:

$$۱)\ ۵۲^{۲}; \qquad ۲)\ ۳۳ \times ۲۷; \quad ۳)\ ۵۹^{۲};$$

$$۴)\ ۷۱ \times ۷۲; \quad ۵)\ ۸۳ \times ۷۸; \quad ۶)\ ۱۰۴ \times ۹۶$$

***۲۱۴.** قانونی برای محاسبهٔ ذهنی مجذور عددهای دورقمی که به ۵ ختم شده‌اند مثل ۳۵ یا ۸۵، پیدا کنید.

***۲۱۵.** آیا هر عدد اول می‌تواند یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه در مثلث فیثاغوری (مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن، عددهایی طبیعی است)، باشد؟ برای وتر چنین مثلث‌هایی چطور؟

***۲۱۶.** به‌شرط $a^{۲} + a + ۱ = ۰$ مطلوب است محاسبهٔ

$$a^{۱۳۷۳} + \frac{۱}{a^{۱۳۷۳}}$$

*۲۱۷. ثابت کنید، تفاضل مجذورهای دو عدد درست، که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

*۲۱۸. به‌ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n، حاصل عبارت

$$N = n^۲ + (n+۱)^۲ + (n+۲)^۲ + (n+۳)^۲$$

بر ۱۰ بخش‌پذیر است؟

*۲۱۹. این مجموع را محاسبه کنید:

$$A = ۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \ldots + ۹۹^۲ - ۱۰۰^۲ + ۱۰۱^۲$$

*۲۲۰. ثابت کنید، عدد

$$B = \underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{بار } (n-۱)}۷\underbrace{۰۰\ldots۰}_{\text{بار } (n-۱)}۲\underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{بار } n}$$

برابر است با توان سوم یک عدد طبیعی.

*۲۲۱. روی یک شکل، درستی اتحاد زیر را نشان دهید:

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

*۲۲۲. اگر داشته‌باشیم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱۳۷۴$$

برای عددهای طبیعی x و y، چند زوج جواب به‌دست می‌آید؟

*۲۲۳. این عدد را درنظر می‌گیریم.

$$B = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + ۹۵^۳$$

ثابت کنید، عدد B بر عددهای ۹۶ و ۱۰۰ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد B بر ۹۷ را پیدا کنید.

*۲۲۴. در مربعی با ضلع به‌طول a، مستطیلی را با مساحت برابر S محاط کرده‌ایم، به‌نحوی که، هر راس این مستطیل روی یکی از ضلع‌های مربع باشد (دو راس مستطیل روی یک ضلع مربع نیستند). طول قطر این مستطیل را محاسبه کنید.

*۲۲۵. از راس A در مربع $ABCD$ با ضلع به‌طول برابر a، خط راستی گذرانده‌ایم تا ضلع BC را در M و ادامهٔ ضلع DC را در N قطع کند (A و B و C و D را، به همین ردیف و درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، در راس‌های مربع قرار دهید). ثابت کنید:

$$\frac{۱}{|CM|} - \frac{۱}{|CN|} = \frac{۱}{a}$$

(منظور از $|CM|$، طول پاره‌خط راست CM و منظور از $|CN|$، طول پاره‌خط راست CN است).

*۲۲۶. نقطه‌های M و N، نقطه‌های وسط ضلع‌های CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. خط‌های راست AM و BN، در نقطه P به‌هم رسیده‌اند. مساحت مثلث ANP، چه بخشی از مساحت متوازی‌الاضلاع مفروض را تشکیل می‌دهد؟

*۲۲۷. ثابت کنید، عدد $۲^{۹۹} + ۲^{۹}$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

*۲۲۸. x و y چه عددهایی باشند تا داشته‌باشیم:

$$x^۲ + y^۲ + x + ۳y + ۵ = ۰$$

۹. تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها به‌صورت ضرب عامل‌ها

۱§. روش‌های تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای را، گاهی می‌توان به‌صورت ضرب دو یا چند چندجمله‌ای تبدیل کرد. اگر چنین عملی ممکن باشد، می‌گویند: *چندجمله‌ای، به‌صورت ضرب دو یا چند عامل تجزیه شده‌است.*

تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها، برای ساده‌کردن کسرهای جبری، پیدا کردن مجموع چند کسر جبری، حل معادله‌ها و بسیاری جاهای دیگر، لازم است.

البته، همیشه نمی‌توان یک چندجمله‌ای را به‌صورت ضرب عامل‌های ساده‌تر، تجزیه کرد و، درحالت‌هایی که این تجزیه ممکن باشد، اغلب با دشواری می‌توان به نتیجه رسید. درواقع، یک قانون کلی، برای تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها وجود ندارد و، اگر از حالت‌های ساده بگذریم، در هر مورد خاص، باید روش خاصی برای تجزیه جست‌وجو کرد. و این، درحالی است که «تجزیه»، اغلب می‌تواند به ساده شدن عبارت‌های جبری یاری رساند.

در این فصل، از روش‌های ساده‌ای که می‌توانند در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، به ما کمک کنند، صحبت شده‌است. برخی از روش‌های پیچیده‌تر هم، ضمن حل مساله‌ها آمده‌است.

۱. روش پیدا کردن سازه یا عامل مشترک (فاکتورگیری). اگر همهٔ جمله‌های چندجمله‌ای، در عامل یا عامل‌هایی مشترک باشند، می‌توان عامل یا عامل‌های مشترک را از آن‌ها جدا کرد.

چندجمله‌ای $a^2 - ab$ را درنظر بگیرید. هر دو جملهٔ a^2 و $-ab$، دارای عامل a هستند (به‌زبان دیگر، هردو بر a بخش‌پذیرند). a را می‌نویسیم و در سمت راست آن، پرانتزی باز می‌کنیم؛ در داخل پرانتز، خارج‌قسمت

چندجمله‌ای مفروض بر a را قرار می‌دهیم.

$$a^2 - ab = a(a-b)$$

مثال ۱. $7a^2xy - 14a^5x^3 = 7a^2x(y - 2a^3x^2)$

مثال ۲.

$$6x^2y^3 - 2uxy^2 + 4u^2xy =$$
$$2xy(3xy^2 - uy + 2u^2)$$

۲. کلی‌تر کردن روش فاکتورگیری. گاهی می‌توان، جمله‌های چندجمله‌ای را به دو یا چند گروه تقسیم کرد و سپس، در هر گروه، عامل‌های مشترک را پیدا کرد. این روش وقتی کارساز است که: ۱) تعداد جمله‌ها، در همهٔ گروه‌ها، یکی باشد؛ ۲) عبارت‌هایی که، در گروه‌های مختلف، در درون پرانتزها پدید می‌آید، یکسان باشند. دراین‌صورت، این عبارت مشترک (که در داخل پرانتزهاست)، به نوبهٔ خود، عامل مشترکی می‌شود که، چندجمله‌ای را تجزیه می‌کند.

مثال ۳.

$$ax + bx + ay + by =$$
$$= x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

مثال ۴.

$$10a^3 - 6b^3 + 4ab^2 - 15a^2b =$$
$$= (10a^3 - 15a^2b) + (4ab^2 - 6b^3) =$$
$$= 5a^2(2a - 3b) + 2b^2(2a - 3b) = (2a - 3b)(5a^2 + 2b^2)$$

یادداشت. باید توجه داشت که، درصورت لزوم، می‌توان $b - a$ را به‌صورت $-(a - b)$ نوشت تا جمله‌های مشترک به‌روشنی دیده شوند و اشتباهی پیش نیاید.

مثال ۵.

$$\begin{aligned}
&۶ax - ۲bx + ۹by - ۲۷ay = \\
&= ۲x(۳a - b) + ۹y(b - ۳a) = \\
&= ۲x(۳a - b) - ۹y(۳a - b) = (۳a - b)(۲x - ۹y)
\end{aligned}$$

۳. تبدیل جمله‌ای از چندجمله‌ای. گاهی برای استفاده از روش گروه‌بندی، لازم می‌شود، جمله‌ای از چندجمله‌ای را به مجموع یا تفاضل دوجمله تبدیل کنیم.

مثال ۶.

$$\begin{aligned}
&p^۲ + pq - ۲q^۲ = \\
&= p^۲ + ۲pq - pq - ۲q^۲ = p(p + ۲q) - q(p + ۲q) = \\
&= (p + ۲q)(p - q)
\end{aligned}$$

مثال ۷.

$$\begin{aligned}
&۴x^۲ - ۳x - ۱ = \\
&= ۴x^۲ - ۴x + x - ۱ = ۴x(x - ۱) + (x - ۱) = \\
&= (x - ۱)(۴x + ۱)
\end{aligned}$$

۴. استفاده از اتحادها. باتوجه به اتحادها و این‌که هر اتحاد، به‌معنای آن است که دوطرف برابری، درواقع یکی هستند، یعنی یک چندجمله‌ای،

به دو صورت مختلف نوشته شده‌است، می‌توان برخی از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کرد.

مثال ۸.

$$\begin{aligned}&4x^2 + 20xy + 25y^2 = \\ &= (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = (2x + 5y)^2\end{aligned}$$

مثال ۹.

$$\begin{aligned}&a^2b^6 - c^4 = (ab^3)^2 - (c^2)^2 = \\ &= (ab^3 + c^2)(ab^3 - c^2)\end{aligned}$$

مثال ۱۰.

$$\begin{aligned}&8x^3 + 125 = (2x)^3 + 5^3 = \\ &= (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)\end{aligned}$$

مثال ۱۱.

$$\begin{aligned}&t^2 + 11t + 24 = \\ &t^2 + (8 + 3)t + 8\times 3 = (t + 8)(t + 3)\end{aligned}$$

موفقیّت در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، اغلب، بستگی به این دارد که بتوانیم، روش‌های یاد شده را به‌هم ترکیب کنیم.

مثال ۱۲.

$$\begin{aligned}&12 + x^3 - 4x - 3x^2 = \\ &= (12 - 3x^2) + (x^3 - 4x) = 3(4 - x^2) - x(4 - x^2) = \\ &= (4 - x^2)(3 - x) = (2 + x)(2 - x)(3 - x)\end{aligned}$$

۵. تجزیهٔ یک سه‌جمله‌ای درجه دوم. برخی از سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم را، می‌توان بدون دشواری و با روش‌های مختلف، تجزیه کرد، ولی راه‌حلی کلی وجود دارد که، هر سه‌جمله‌ای درجه دوم را، به‌شرطی که قابل‌تجزیه باشد، می‌توان به‌یاری آن تجزیه کرد. با مثالی، مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۳. می‌خواهیم، سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲ - ۳x - ۱۸$ را تجزیه کنیم

روش اول. جملهٔ $-۳x$ را به‌صورت $-۶x + ۳x$ می‌نویسیم:

$$x^۲ - ۳x - ۱۸ = (x^۲ - ۶x) + (۳x - ۱۸) =$$
$$= x(x - ۶) + ۳(x - ۶) = (x - ۶)(x + ۳)$$

روش دوم. از اتحاد

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$$

استفاده می‌کنیم. سه‌جمله‌ای $x^۲ - ۳x - ۱۸$، به ضرب دو پرانتز تجزیه می‌شود که جملهٔ مشترک آن‌ها برابر است با x.

$$x^۲ - ۳x - ۱۸ = (x \quad\;)(x \quad\;)$$

دوجملهٔ غیرمشترک درون پرانتزها، باید چنان باشند که جمع جبری آن‌ها برابر ۳- و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۸- شود. عدد ۱۸ را به چند طریق می‌توان به‌صورت ضرب دو عدد نوشت

$$۱۸ = ۱ \times ۱۸ = ۲ \times ۹ = ۳ \times ۶$$

۱ و ۱۸ یا ۲ و ۹، با هر علامتی که درنظر گرفته شوند، نمی‌توانند مجموعی برابر ۳- داشته‌باشند، ولی دو عدد ۶- و ۳، مجموعی برابر ۳- دارند. یعنی

$$x^۲ - ۳x - ۱۸ = (x - ۶)(x + ۳)$$

روش سوم (روش کلی). جمله‌های درجه دوم و درجه اول این سه‌جمله‌ای را درنظر می‌گیریم: $x^2 - 3x$؛ ببینیم چه عددی به این دو جمله باید اضافه کنیم تا سه‌جمله‌ای حاصل، مجذور یک دوجمله‌ای شود. این عدد عبارت است از مجذور نصف ضریب x. ضریب x برابر ۳−، نصف آن $-\frac{3}{2}$ و مجذور آن برابر $\frac{9}{4}$ است. دراین‌صورت سه‌جمله‌ای $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$، با مجذور یک دوجمله‌ای برابر است:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

اکنون، به تجزیهٔ سه‌جمله‌ای اصلی می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 18 &= \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 18 = \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right) = \\ &= (x+3)(x-6) \end{aligned}$$

درحالی که سه‌جمله‌ای درجه دوم، دارای ضریبی مخالف واحد باشد، ابتدا، از این ضریب فاکتور بگیرید، سپس، عمل‌ها را ادامه دهید.

مثال ۱۴. سه‌جمله‌ای $5x^2 - 13x - 6$ را تجزیه کنید.

حل. تجزیه این سه‌جمله‌ای با روش‌های اول و دوم مثال ۱۳، کار را اندکی دشوار می‌کند. ولی با روش کلی به مشکلی برنمی‌خوریم. همان‌طور که گفتیم، در آغاز از ضریب x^2، یعنی ۵ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 13x - 6 &= 5\left(x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}\right) = \\ &= 5\left[\left(x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{169}{100}\right) - \frac{169}{100} - \frac{6}{5}\right] = \end{aligned}$$

$$= ۵\left[\left(x - \frac{۱۳}{۱۰}\right)^{۲} - \frac{۲۸۹}{۱۰۰}\right] =$$
$$= ۵\left(x - \frac{۱۳}{۱۰} + \frac{۱۷}{۱۰}\right)\left(x - \frac{۱۳}{۱۰} - \frac{۱۷}{۱۰}\right) =$$
$$= ۵\left(x + \frac{۲}{۵}\right)(x - ۳) = (۵x + ۲)(x - ۳)$$

مثال ۱۵.

$$۴x^{۲} - ۱۲x + ۱ =$$
$$= ۴\left(x^{۲} - ۳x + \frac{۱}{۴}\right) = ۴\left[\left(x^{۲} - ۳x + \frac{۹}{۴}\right) - \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۴}\right] =$$
$$= ۴\left[\left(x - \frac{۳}{۲}\right)^{۲} - ۲\right] =$$
$$= ۴\left(x - \frac{۳}{۲} + \sqrt{۲}\right)\left(x - \frac{۳}{۲} - \sqrt{۲}\right) =$$
$$= (۲x - ۳ + ۲\sqrt{۲})(۲x - ۳ - ۲\sqrt{۲})$$

مثال ۱۵. ثابت کنید سه‌جمله‌ای $x^{۲} - ۴x + ۱۳$ را نمی‌توان به ضرب دو عامل درجه اول تجزیه کرد.

حل. با همان روش کلی عمل می‌کنیم.

$$x^{۲} - ۴x + ۱۳ = (x^{۲} - ۴x + ۴) - ۴ + ۱۳ =$$
$$= (x - ۲)^{۲} + ۹$$

و روشن است که دیگر نمی‌توان کار را ادامه داد. درواقع، سه‌جمله‌ای ما، به مجموع دو مقدار غیرمنفی (یا به مجموع دو مجذور کامل) تبدیل شده‌است و این، به‌معنای آن است که معادلهٔ درجه دوم

$$x^{۲} - ۴x + ۱۳ = ۰$$

جواب حقیقی ندارد.

§۲. تعیین بزرگترین بخشیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها.

اگر بتوانیم چندجمله‌ای‌های مفروض را، به ضرب عامل‌ها، تجزیه کنیم، شبیه عددهای طبیعی، می‌توانیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها را به‌دست آوریم.

مثال ۱. مطلوب است بزرگترین بخشیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک، بین چندجمله‌ای‌های

$$x^5 - 3x^3 + 2x^2 \text{ و } x^4 - 5x^3 + 4x^2$$

حل. درآغاز، هریک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$1)\ x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^3 - 3x + 2) =$$
$$= x^2[(x^3 - x) + (-2x + 2)] =$$
$$= x^2[x(x^2 - 1) - 2(x - 1)] =$$
$$= x^2[x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)] =$$
$$= x^2(x - 1)(x^2 + x - 2) = x^2(x - 1)[(x^2 - x) + (2x - 2)] =$$
$$= x^2(x - 1)[x(x - 1) + 2(x - 1)] = x^2(x - 1)^2(x + 2);$$
$$2)\ x^4 - 5x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 5x + 4) =$$
$$= x^2[(x^2 - x) + (-4x + 4)] =$$
$$= x^2[x(x - 1) - 4(x - 1)] = x^2(x - 1)(x - 4)$$

به‌این ترتیب با این دو عبارت سروکار داریم:

$$x^2(x - 1)^2(x + 2) \text{ و } x^2(x - 1)(x - 4)$$

بزرگترین بخشیاب‌مشترک برابر است‌با حاصل‌ضرب‌عامل‌های مشترک (پایه‌های مشترک با نماهای کوچکتر)، یعنی

$$x^۲(x-۱)$$

و کوچکترین مضرب مشترک، برابر است با حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک (با نماهای بزرگتر) در عامل‌های غیرمشترک، یعنی

$$x^۲(x-۱)^۲(x+۲)(x-۴)$$

کوچکترین مضرب مشترک را، به‌این‌ترتیب هم می‌توان به‌دست آورد که، یکی از چندجمله‌ای‌ها را، بر بزرگترین بخشیاب مشترک تقسیم، و خارج‌قسمت حاصل را در چندجمله‌ای دیگر ضرب کنیم. در مثال بالا، اگر چندجمله‌ای $x^۴-۵x^۳+۴x^۲$ را بر $x^۲(x-۱)$ (بزرگترین بخشیاب مشترک) تقسیم کنیم:

$$\frac{x^۴-۵x^۳+۴x^۲}{x^۲(x-۱)}=\frac{x^۲(x-۱)(x-۴)}{x^۲(x-۱)}=x-۴$$

از ضرب این خارج‌قسمت در چندجمله‌ای دوم، کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها به‌دست می‌آید:

$$[(x-۴)]\times[x^۲(x-۱)^۲(x+۲)]=$$
$$=x^۲(x-۱)^۲(x+۲)(x-۴)$$

ولی اغلب پیش می‌آید که نمی‌توانیم چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کنیم. دراین‌صورت، می‌توان با تقسیم‌های متوالی، ابتدا بزرگترین بخشیاب مشترک را پیدا کرد و، سپس به‌یاری آن (و طبق قاعده‌ای که هم‌اکنون آوردیم)، کوچکترین مضرب مشترک را به‌دست آورد.

مثال ۲. بزرگترین بخشیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک این چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

$$A = x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۲x + ۸;$$
$$B = x^۳ + ۲x^۲ - x + ۶$$

حل. چندجمله‌ای A را بر چندجمله‌ای B تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت برابر x و باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم، برابر $۴x^۲-۴x+۸$، یا $۴(x^۲-x+۲)$ می‌شود. اکنون، بخشیاب، یعنی

$$x^۳ + ۲x^۲ - x + ۶$$

را بر این باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم. برای تقسیم، می‌توان از ضریب عدی ۴ (در باقی‌مانده) صرف‌نظر کرد، تا از پیدایش ضرب‌های کسری فرار کنیم. دراین تقسیم، خارج‌قسمت برابر $x + ۳$ و باقی‌مانده برابر صفر می‌شود:

$$\frac{x^۳ + ۲x^۲ - x + ۶}{x^۲ - x + ۲} = x + ۳$$

این آخرین بخشیاب (یعنی $x^۲ - x + ۲$)، یعنی وقتی‌که باقی‌مانده برابر صفر شد، همان بزرگترین بخشیاب مشترک است. به‌این‌ترتیب، بزرگترین بخشیاب مشترک چندخمله‌ای‌های A و B برابر $x^۲ - x + ۲$ است. اگر A و B را بر این بخشیاب مشترک تقسیم کنیم، هم درستی نتیجه‌گیری روشن می‌شود و هم تجزیه دو عبارت A و B به‌دست می‌آید:

$$A = (x^۲ - x + ۲)(x^۲ + ۳x + ۴);$$
$$B = (x^۲ - x + ۲)(x + ۳)$$

اکنون برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک بین A و B، مثلاً خارج‌قسمت B بر $x^۲ - x + ۲$ را در A ضرب می‌کنیم. به‌این ترتیب، کوچکترین مضرب مشترک بین A و B چنین می‌شود:

$$(x + ۳)(x^۲ - x + ۲)(x^۲ + ۳x + ۴)$$

روشن است، برای ساده‌کردن کسرها (که به بزرگترین بخشیاب مشترک صورت و مخرج نیاز داریم) و جمع و تفریق کسرها (که به کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها نیازمندیم، می‌توان از همین روش استفاده کرد.

مثال ۳. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{x^۳ - ۲x^۲ - ۷x + ۲}{x^۴ - ۳x^۳ - ۲x^۲ - ۳x + ۱}$$

حل. باید بزرگترین بخشیاب مشترک صورت و مخرج را پیدا کرد. دوباره تاکید می‌کنیم که، چون در تقسیم‌های متوالی، نیازی به خارج‌قسمت نداریم و تنها به باقی‌ماندهٔ تقسیم توجه داریم، هرجا که لازم است، می‌توانیم چندجمله‌ای‌ها را در عددی ضرب و یا بر عددی تقسیم کنیم، تا دچار ضریب‌های کسری نشویم.

ابتدا مخرج را بر صورت تقسیم می‌کنیم، خارج‌قسمت برابر $x - ۱$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $۳x^۲ - ۱۲x + ۳$ می‌شود که با تقسیم آن بر عدد ۳، می‌توان باقی‌مانده را $x^۲ - ۴x + ۱$ درنظر گرفت. اکنون باید چندجمله‌ای صورت (بخشیاب تقسیم قبلی) را بر $x^۲ - ۴x + ۱$ تقسیم کنیم. در این تقسیم، خارج‌قسمت برابر $x + ۲$ و باقی‌مانده برابر صفر می‌شود. درنتیجه، آخرین بخشیاب، یعنی $x^۲ - ۴x + ۱$، بزرگترین بخشیاب مشترک بین چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج است. اگر صورت و مخرج را بر

$$x^۲ - ۴x + ۱$$

تقسیم کنیم، هم تجزیهٔ عبارت‌های صورت و مخرج به‌دست می‌آید و هم کسر ساده می‌شود:

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x^2 - 4x + 1)(x + 2);$$
$$x^4 - 3x^2 - 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 + x + 1)$$

و درنتیجه

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 2}{x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1} = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

تمرین‌ها

۲۲۹. به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $12a^2b - 18ab^2 + 6ab;$

۲) $3x(a - 2b) + 5y(a - 2b) + a - 2b;$

۳) $14x^2y(8a + 5b) - 35xy^2(8a + 5b);$

۴) $3a^3b^2 - 12ab^4;$ ۵) $x^4 - y^4;$

۶) $a^6 - b^6;$ ۷) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy;$

۸) $x^4 + x^2y^2 + y^4;$ ۹) $x^4 + y^4;$

۱۰) $x^4 - x^2y^2 + y^4;$ ۱۱) $x^4 - 5x^2 + 4;$

۱۲) $ab(a + b) + bc(b - c) - ac(a + c);$

۱۳) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2;$

۱۴) $2t^4 + t^3 + 4t^2 + t + 2;$

۱۵) $x^4 - 2x^2 + 12x - 8$

*۲۳۰. به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $(a+b+c)^{۳}-a^{۳}-b^{۴}-c^{۳};$

۲) $(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}+(c-a)^{۳};$

۳) $-(x+y)^{۳}+(y-z)^{۳}+(z+x)^{۳}$

۴) $a^{۵}+a+۱;$

۵) $x(x+۱)(x+۲)(x+۳)-۱۲۰;$

۶) $(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})^{۲}-۲(a^{۴}+b^{۴}+c^{۴})$

۲۳۱. حاصل عمل‌ها را به‌دست آورید:

۱) $\dfrac{m}{a^{۲}b}+\dfrac{n}{ab^{۲}},$ ۲) $\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{b-a};$

۳) $\dfrac{a-b}{۲a^{۲}-ab-۳b^{۲}}-\dfrac{a+b}{۲a^{۲}-۵ab+۳b^{۲}};$

۴) $\dfrac{x^{۲}-a^{۲}}{x^{۲}-bx+cx-bc}:\dfrac{x^{۲}-ax-cx+ac}{x^{۲}-b^{۲}};$

۵) $\dfrac{۵a}{a+b}-\dfrac{۲a-۳b}{a-b}-\dfrac{۲(a^{۲}-۳ab+b^{۲})}{a^{۲}-b^{۲}};$

۶) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}:\dfrac{x^{۲}y^{۲}}{(x+y)^{۲}+(x-y)^{۲}};$

۷) $\left[\left(\dfrac{۳}{a}-\dfrac{a}{۴}-\dfrac{۲}{a}\right):\dfrac{۲-a}{۴}-\left(۱+\dfrac{۲}{a}\right)\right]:\dfrac{a}{۴-a}$

۲۳۲. این کسرها را ساده کنید:

$$۱)\ \frac{۵a^۲ - ۵ax}{a^۲ - x^۲}; \qquad ۲)\ \frac{۸۱a^۴ - ۱۶b^۴}{۳a + ۲b};$$

$$۳)\ \frac{a^۶ - b^۶}{a^۲ - b^۲}; \qquad ۴)\ \frac{۳۲a^۵ - b^۵}{۲a - b}$$

$$۵)\ \frac{a^۴ + ۴a^۲ + ۱۶}{a^۳ + ۸}; \quad ۶)\ \frac{۲۴x^۶ - ۳۷۵y^۹}{۴x^۵ + ۱۰x^۳y^۳ + ۲۵xy^۶}$$

$$۷)\ \frac{\frac{m^۲ + n^۲}{n} - m}{\frac{۱}{n} - \frac{۱}{m}} \times \frac{m^۲ - n^۲}{m^۳ + n^۳};$$

$$۸)\ \left(\frac{۱}{x + \frac{۱}{y + z}} : \frac{۱}{x + \frac{۱}{y}}\right) - \frac{۱}{y\left(\frac{xy}{z} + x + \frac{۱}{z}\right)};$$

$$۹)\ \frac{۱۷x^۲ - ۱۶x - ۱}{۱۷x^۲ + ۱۸x + ۱} : \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۲x + ۱}$$

۲۳۳. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ را به ضرب دو عامل تجزیه کنید، به‌نحوی که یکی از عامل‌ها برابر $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ باشد.

۲۳۴. به‌شرط $h = \frac{rH}{R - r}$، عبارت

$$\frac{۱}{۳}\pi R^۲(H + h) - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

را به ساده‌ترین صورت خود بنویسید.

۲۲۵. حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

۱) $\frac{a^۲ - ۲ab + b^۲}{ab - b^۲}$ به‌ازای $a = -۰/۵$ و $b = -۱/۵$؛

۲) $\frac{a^۲ + b^۲ - c^۲ + ۲ab}{a + b + c}$ به‌ازای $a = ۰/۲۵$، $b = \frac{۲}{۳}$؛ $c = -۰/۵$؛

۳) $\frac{x^۲ - ۳ax}{b^۲ + ab - ۲a^۲}$ به‌ازای $x = a - b$.

۲۳۶. می‌دانیم $a + b = -۱$ و $ab = ۱$، مطلوب است محاسبهٔ

$$۱)\ a^۲ + b^۲;\quad ۲)\ a^۳ + b^۳;\quad ۳)\ a^۴ + b^۴;$$
$$۴)\ \frac{۱}{a^{۱۲}} + \frac{۱}{b^{۱۲}};\quad ۵)\ a^۹ + b^۹;\quad ۶)\ a^{۱۶} + b^{۱۶}$$

*۲۳۷. بافرض $c^۲ + ۲(ab - bc - ac) = ۰$، $a + b \neq c$ و $b \neq c$ ثابت کنید:

$$\frac{a^۲ + (a - c)^۲}{b^۲ + (b - c)^۲} = \frac{a - c}{b - c}$$

*۲۳۸. کسر $\frac{x^{۱۵} + ۱}{x^{۲۵} + ۱}$ را ساده کنید ($x \neq -۱$).

*۲۳۹. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{(a^۳ + b^۳)(a + b)^۳ + ۲a^۳b^۳}{(a^۲ + b^۲)(a + b)^۲ + a^۲b^۲}$$

*۲۴۰. ثابت کنید، عدد ۲۴۴۱۴۱۶۴۹، عددی مرکب است، یعنی می‌توان آن را به‌صورت ضرب دو عدد (که هیچ‌کدام برابر واحد نباشد) نوشت.

*۲۴۱. ثابت کنید، عدد

$$۹x^۵ - ۵x^۳ - ۴x$$

به‌ازای هر عدد درست x، بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

*۲۴۲. x و y را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$(\overline{xy})^۲ = \overline{(y-۱)xxy}$$

*۲۴۳. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{۲۹۵ - ۴۱۳\sqrt[۳]{۲} + ۱۷۷\sqrt[۳]{۴}}{۵ + ۳\sqrt[۳]{۴} - ۷\sqrt[۳]{۲}}$$

*۲۴۴. ثابت کنید، برای این‌که داشته‌باشیم:

$$\frac{y+z-x}{yz} + \frac{z+x-y}{xz} = \frac{x+y-z}{xy}$$

باید داشته‌باشیم $x = y + z$ یا $y = x + z$ (x و y و z، مخالف صفرند).

*۲۴۵. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{a^۳(c-b) + b^۳(a-c) + c^۳(b-a)}{a^۲(c-b) + b^۲(a-c) + c^۲(b-a)}$$

*۲۴۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$۱)\ S_۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n;$$

$$۲)\ S_۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲$$

$$۳)\ S_۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + n^۳$$

حلّ مسأله‌ها

ریاضیات بیشتر شیوهٔ عمل است تا شیوهٔ یادگیری

براور

پیش‌از آغاز

۱. ۱) از ۲ آغاز شده‌است و عددهای طبیعی، پشت‌سرهم، به‌ردیف آمده‌اند. بنابراین، سه عدد بعدی عبارتند از ۸، ۹ و ۱۰.

***یادداشت ۱.** وقتی عددها، طبق قانونی به‌دنبال هم بیایند، به‌نحوی که با آگاهی از آن قانون بتوان آن را ادامه داد، به این ردیف عددها، **دنباله**، یا دقیق‌تر **دنبالهٔ عددی** و به‌هر عدد آن، یک **جمله** از دنباله گویند. در این‌جا، با **دنبالهٔ عددهای طبیعی** (با آغاز از ۲) سروکار داشتیم. معمولاً در ریاضیات با *دنباله‌های بی‌پایان* (نامتناهی) سروکار داریم.

بهترین دنباله‌ها، آن‌هایی هستند که بتوان جمله‌های پشت‌سرهم را، درآن، ازروی دستوری (که به‌شکل یک فرمول ریاضی باشد) پیدا کرد. اگر چنین دستوری برای تعیین جمله‌های یک دنباله وجود داشته‌باشد. آن را **جملهٔ عمومی** دنباله گویند و معمولاً با u_n نشان می‌دهند که معرف جملهٔ nام دنباله است. مثلاً، جملهٔ عمومی، برای دنبالهٔ عددهای طبیعی، چنین است:

$$u_n = n$$

اگر به‌جای n، عدد ۱ را قرار دهیم، نخستین عدد طبیعی به‌دست می‌آید:

$$u_۱ = ۱$$

و اگر به‌جای n، عدد ۱۰ را قرار دهیم، دهمین عدد طبیعی به‌دست می‌آید:

$$u_{۱۰} = ۱۰$$

ولی گاهی n، معرف ردیف جمله نیست، چراکه ممکن است، مقدار n، از ۲ یا ۳ یا عدد دیگری آغاز شود. مثلاً در مساله ماهم، جملهٔ عمومی، همان

$$u_{n-۱} = n \quad (n > ۱)$$

است،ولی می‌بینید که باشرط $n > ۱$ همراه است. در این‌جا، به‌ازای $n = ۲$، جملهٔ اول و به‌ازای $n = ۷$، جمله ششم دنباله به‌دست می‌آید، به‌همین مناسبت آن را با $u_{n-۱}$ نشان دادیم: u_n همیشه معرف جملهٔ nام است.

*یادداشت ۲. ما پاسخی برای مسالهٔ خودمان پیدا کردیم، ولی می‌توان پاسخ‌های دیگری هم برای این مساله پیدا کرد. درواقع، این مساله، بی‌نهایت جواب دارد. در یادداشت ۱ گفتیم، جمله‌های پشت‌سرهم یک دنباله را می‌توان، با در دست داشتن جملهٔ عمومی آن، پیدا کرد. دنباله‌ای را درنظر بگیرید که جملهٔ عمومی آن، چنین باشد:

$$u_{n-۱} = (n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)(n-۶)(n-۷) + n$$
$$(n \geq ۲)$$

اگر تنها به این نکته توجه داشته‌باشید که، حاصل‌ضرب هر عددی در صفر، برابر صفر است، آن‌وقت اگر به‌جای n، به‌ترتیب، عددهای ۲، ۳، ۴، ...، ۱۰ را قرار دهیم، ۹ جملهٔ اول دنباله به‌دست می‌آید که چنین‌اند:

$$۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۷۲۸, ۵۰۴۹, ۲۵۲۱۰$$

بنابراین، می‌توان، برای پاسخ به مساله، این سه عدد را نام برد:

$$۷۲۸, ۵۰۴۹, ۲۵۲۱۰$$

و اگر جملهٔ عمومی را، به‌صورت

$$u_{n-۱} = \frac{۱}{۷۲۰}(n-۲)(n-۳)\ldots(n-۷)+n$$

درنظر بگیریم، شش جملهٔ اول دنباله، همان ($n > ۱$) عددهای مساله، یعنی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ به‌دست می‌آید و سه جملهٔ بعد از آن‌ها چنین‌اند:

$$۹, ۱۶, ۴۵$$

خودتان می‌توانید جمله‌های عمومی دیگری برای دنباله درنظر بگیرید، به‌نحوی که شش جملهٔ نخست آن، همان شش عدد مفروض باشد، ولی برای سه جمله بعد، عددهای دیگری به‌دست آید.

برای ۱۱ دنبالهٔ بعدی هم، تلاش کنید، جملهٔ عمومی را بنویسید. آیا جملهٔ عمومی وجود دارد؟ آیا این جملهٔ عمومی یگانه است؟ اگر مساله، پاسخ‌های دیگری هم دارد، برخی از آن‌ها را پیدا کنید.

۲) پاسخ: ۴، ۳ و ۲.

۳) پاسخ: ۳۵، ۴۰ و ۴۵.

۴) پاسخ: ۳، ۱ و ۱.

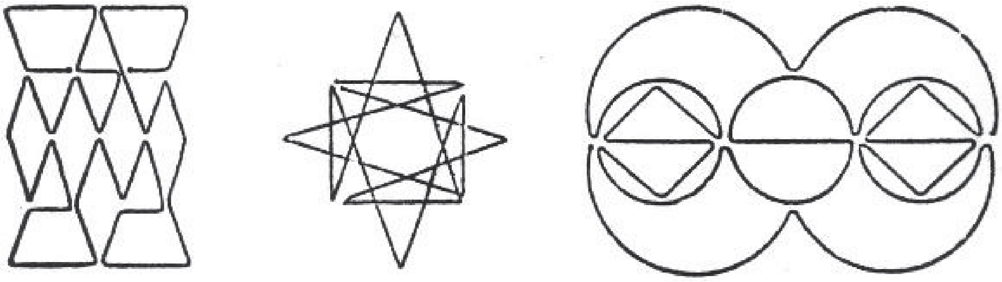
۵) پاسخ: ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶.

۶) پاسخ: ۶، ۳ و ۱.

۷) پاسخ: $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۸}$.

۸) پاسخ: ۲۴، ۳۱ و ۳۹.

۹) پاسخ: ۱۲، ۱۹ و ۱۱.



شکل ۲۵

۱۰) *پاسخ:* ۳۸، ۷۶، ۷۸.

۱۱) *پاسخ:* (دنبالهٔ عددهای اول) : ۱۷ ، ۱۹ و ۲۳.

۱۲) *پاسخ:* ۳۹، ۳۱ و ۴۱.

یادداشت. به‌جز ۲ ، بقیهٔ عددهای اول، عددهایی فردند. در دنبالهٔ عددهای اول، «دوقلوها»یی وجود دارد، یعنی عددهای فرد پشت‌سرهم که هردوی آن‌ها، عددهایی اول‌اند. مثل

(۳, ۵) : (۱۱, ۱۳); (۱۷, ۱۹); (۲۹, ۳۱);

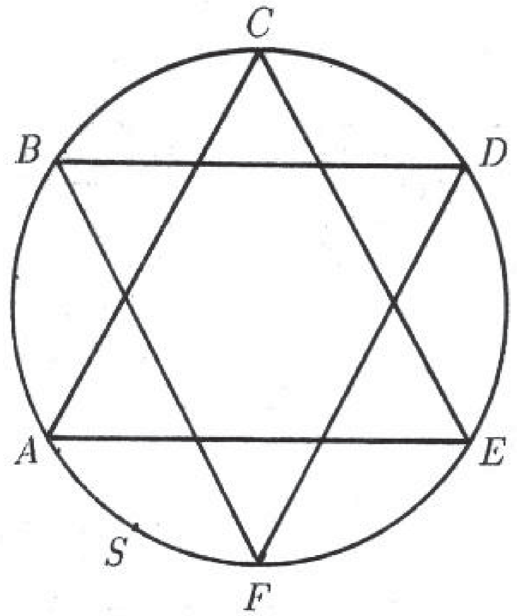
(۴۱, ۴۳); (۵۹, ۶۱); (۷۱, ۷۳); (۱۰۱), ۱۰۳); . . .

در این‌جا، درهر پرانتز دو عدد اول پشت‌سرهم گذاشته شده که، درضمن، دو عدد فرد پشت‌سرهم‌اند. یعنی، در هر پرانتز، یک «دوقلوی اول» نوشته شده‌است.

۴. پاسخ را در شکل ۲۵ می‌بینید.

***یادداشت.** با استدلالی ظریف، می‌توان پیش از تلاش برای حل مساله‌هایی از این‌گونه، متوجه شد، آیا مساله جواب دارد یا بدون جواب است؟ یعنی، آیا با یک حرکت قلم، می‌توان آن را رسم کرد یا نه؟

ابتدا دو تعریف را می‌پذیریم. اگر نقطه‌ای را که، درآن، چند خط (مستقیم یا منحنی) به‌هم رسیده‌اند، **گره** بنامیم، آن‌وقت، در شکل‌هایی نظیر



شکل ۲۶

شکل‌های مسالهٔ ۴، با دونوع گره ممکن است برخورد کنیم: ۱) گرهی که ازآن، به تعداد زوج خط خارج شده‌است (گره‌های زوج) و ۲) گره‌هایی که تعداد خط‌های خارج‌شده ازآن، فرد است (گره‌های فرد).

اکنون، این حکم را ثابت می‌کنیم:

هر شکلی را که همهٔ گره‌های آن زوج باشد ویا، به‌جز گره‌های زوج، تنها دو گره فرد داشته‌باشد، می‌توان با یک حرکت قلم رسم کرد.

در مسالهٔ ۴، همهٔ گره‌ها در دوشکل سمت چپ زوج‌اند و شکل سمت راست، تنها دو گره فرد دارد (دو نقطهٔ انتهایی سمت چپ و سمت راست)؛ به‌همین مناسبت، همهٔ آن‌ها را می‌توان بایک حرکت قلم رسم کرد.

درحالتی که تنها با گره‌های زوج سروکار داریم، می‌توان از هر نقطهٔ دلخواه شکل آغاز کرد و بعد از پیمودن تمامی شکل، به نقطهٔ آغاز حرکت رسید. ولی توجه کنید: این حرکت را نمی‌توان به دلخواه انجام داد. مثلاً شکل ۲۶ را درنظر بگیریم. در این‌جا، همه گره‌ها، زوج است (از هر نقطه برخورد، چهار خط خارج شده‌است).فرض کنید، از نقطهٔ S آغاز کرده‌باشیم.

اگر در آغاز حرکت، دایره را دور بزنیم و خود را دوباره به S برسانیم، مواجه با بن‌بست می‌شویم. ولی اگر، ضمن دور زدن دایره، در یکی از گره‌ها، روی محیط یکی از مثلث‌ها حرکت کنیم و، بعد از آن که دوباره به این گره رسیدیم، باز هم بخشی از دایره را دور بزنیم و، سپس، روی محیط مثلث دوم حرکت کنیم و، سرانجام، بقیه محیط دایره را دور بزنیم، راه‌حل پیدا می‌شود.

مثلاً می‌توان، روی شکل ۲۶ این مسیر را انتخاب کرد:

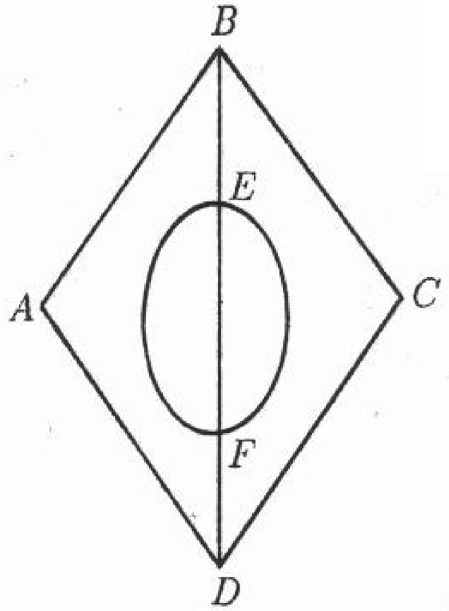
$$S\overset{\frown}{A}B\Rightarrow \overline{BF}\Rightarrow \overline{FD}\Rightarrow \overline{DB}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC\overset{\frown}{D}E\Rightarrow \overline{EA}\Rightarrow \overline{AC}\Rightarrow \overline{CE}\Rightarrow EFS$$

همین مثال، روشن می‌کند که، با آغاز از نقطه‌ای مثل S، دوباره در پایان کار به‌همان نقطهٔ آغاز حرکت برمی‌گردیم؛ درضمن، مسیر منحصربه‌فرد نیست و می‌توان مسیرهای متفاوتی به‌دست آورد (اگر روی شکل، از نقطهٔ S آغاز کنیم، چند مسیر برای حرکت وجود دارد؟ آیا می‌توانید، تعداد این مسیرها، یعنی تعداد جواب‌ها را پیدا کنید؟).

دلیل اصلی قابل‌حل بودن شکل‌های با گره‌های زوج، این است‌که وقتی روی یک خط به گرهی می‌رسیم، ناچاریم روی خط دیگری از گره خارج شویم و، به‌این‌ترتیب، دو واحد از تعداد خط‌های مربوط به این گره کم می‌شود تا، سرانجام، تعداد آن‌ها به صفر برسد.

اکنون به‌حالتی می‌پردازیم که، به‌جز گره‌های زوج، تنها دو گره فرد داشته‌باشد. شکل ۲۷ از این‌گونه است: در نقطه‌های A و C دو خط و در نقطه‌های E و F چهار خط به‌هم رسیده‌اند؛ بنابراین، A و C، E و F گره‌های زوج‌اند. و در هریک از نقطه‌های B و D سه‌خط به‌هم رسیده‌اند (دو گره B و D، فردند).

اگر از یکی از گره‌های فرد، و مثلاً B، آغاز کنیم و مسیر ACD را بپیماییم، مساله حل می‌شود؛ زیرا اگر مسیر ACD را از شکل حذف کنیم،



شکل ۲۷

بقیهٔ شکل، تنها با گره‌های زوج سروکار دارد و، بنابراین، با آغاز از نقطهٔ D می‌توان (مثل حالت اول)، با حرکت یک قلم، همه خط‌های شکل را پیمود و دوباره به D رسید.

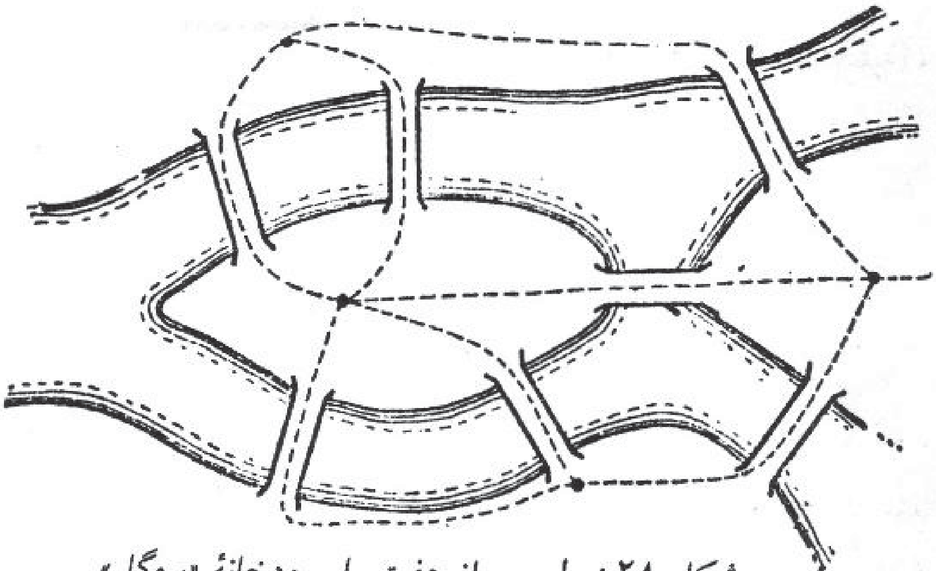
دراین حالت، به دو نکته توجه کنیم. از نقطهٔ B آغاز کردیم و در نقطهٔ D به‌پایان رسم رسیدیم. یعنی دراین‌حالت، باید از یک گره فرد آغاز کرد و در گره فرد دوم، رسم را تمام کرد (برخلاف حالت گره‌های زوج، که می‌توانستیم از نقطهٔ دلخواهی آغاز کنیم و، سرانجام، خود را به‌همان نقطه برسانیم).

نکتهٔ دوم این‌که، مسیر نخستین را باید طوری انتخاب کرد که، بعد از رسیدن به گره فرد دوم، بخشی از شکل جدا شود و بقیهٔ آن، شکل مستقلی باشد.

مثلاً، اگر مسیر نخستین را روی خط راست $BEFD$ می‌گرفتیم، به بن‌بست می‌رسیدیم و مساله حل نمی‌شد.

محاسبه کنید، در شکل، با آغاز از نقطهٔ B، چند مسیر وجود دارد که حل مساله را به‌پایان برساند؟

در همین‌جا یادآوری می‌کنیم، اگر شکل، دارای چهار گره فرد باشد، با



شکل ۲۸ : طرحی از هفت پل رودخانهٔ «پره‌گل»

دوحرکت قلم (ونه با یک حرکت) قابل رسم است.

اکنون تلاش کنید، مساله را درحالت کلی (یعنی وقتی دارای k گره زوج و m گره فرد باشد) تنظیم و، درحالت‌های مختلف، نوع جواب را مشخص کنید.

لئونارداولر، ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ هجدهم، در سال ۱۷۳۶ میلادی وقتی که سی‌ساله بود، مساله‌ای را طرح و حل کرد که به‌همین مسالهٔ «حرکت پیوستهٔ روی شکل، بدون جدا کردن قلم از آن» مربوط می‌شود.

رودخانه پره‌گل که از شهر گنسبورگ واقع در روسیه می‌گذشت، هفت پل داشت که کرانه‌های رود را به‌هم وصل می‌کردند. مسالهٔ «اولر» چنین است:

آیا می‌توان از هر هفت پل رودخانهٔ پره‌گل و از هرکدام تنها یک بار عبور کرد؟

و اولر ثابت کرد: این مساله جواب ندارد (چرا؟).

۵. با این‌که، این مساله را، با علامت * مشخص کرده‌ایم، نمی‌توان آن را جزو مساله‌های دشوار به‌حساب آورد. خواهیددید، با اندکی توجه، می‌توان کلید حل مساله را پیدا کرد.

بیشترین آگاهی در آن جا داده شده‌است که از ضرب یک عدد یک‌رقمی

(رقم سمت چپ در خارج‌قسمت) دریک عدد دورقمی (عدد مقسوم‌علیه)، عددی بصورت (۷۷*) به‌دست آمده‌است:

(۱)	× * *
	*
	۷۷*

اگر عددهای یک‌رقمی (از ۰ تا ۹) را درنظر بگیریم، تنها از ضرب دو عدد ۳ و ۹ ویا از ضرب دو عدد ۱ و ۷، به عددی می‌رسیم که به ۷ ختم شده‌است. ولی ۱ و ۷ را باید کنار بگذاریم، زیرا اگر جمله دوم ضرب (۱) را برابر ۱ بگیریم، حاصل‌ضرب دورقمی می‌شود، نه سه‌رقمی، و اگر جملهٔ دوم ضرب (۱) را ۷ بگیریم، جملهٔ اول ضرب باید برابر ۱۱ باشد، ولی بازهم دراین‌صورت حاصل‌ضرب دورقمی می‌شود.

بنابراین، ضرب (۱)، به یکی از این دوصورت است:

× ۳ *		× ۹ *
۹	یا	۳
۷۷*		۷۷*

و برای این‌که حاصل‌ضرب به ۷۷ ختم شود، باید به‌این صورت باشند:

× ۵۳		× ۵۹
۹	یا	۳
۴۷۷		۱۷۷

ولی اگر مقسوم‌علیه را برابر ۵۹ بگیریم، آن‌وقت، از ضرب رقم دوم خارج‌قسمت (یعنی ۷) درآن ، به عدد ۴۱۳ می‌رسیم، درحالی‌که بنابر فرض مساله، این حاصل ضرب باید به‌صورت

۷

باشد. درنتیجه، مقسوم‌علیه برابر ۵۳ و رقم سمت چپ خارج قسمت، برابر ۹ می‌شود.

از ضرب رقم سمت راست خارج‌قسمت در مقسوم‌علیه (یعنی ۵۳) باید عدد دورقمی به‌دست آید؛ واین، ممکن نیست مگر این‌که رقم سمت راست خارج قسمت برابر واحد باشد.

و به‌این‌ترتیب، تقسیم مشخص می‌شود:

```
۵۱۴۶۳ | ۵۳
۴۷۷   |----
----- | ۹۷۱
 ۳۷۶
 ۳۷۱
-----
   ۵۳
   ۵۳
-----
    ۰
```

اکنون خودتان، انی دو ضرب را تکمیل کنید (با استدلال منطقی):

```
      ۲ * *  ×      ||          ۶ * *  ×
      ۳ * *         ||          * * *
      -----         ||          -----
      ۵ * *         ||          * * *
    * ۴ *           ||        * * * *
  * * ۳             ||      * ۵ * ۵
  ---------         ||      -----------
  * * * * *         ||      * * ۵ * ۴ *
```

(در بین رقم‌های ضرب سمت چپ، رقم ۷ وجود ندارد و در ضرب سمت راست، به‌جز آن چه در صورت مساله داده شده‌است، بازهم رقم‌های ۴، ۵ و ۶ وجود دارد).

پاسخ.

$$\begin{array}{r} \text{۶۴۵} \times \\ \text{۷۲۱} \\ \hline \text{۶۴۵} \\ \text{۱۲۹۰} \\ \text{۴۵۱۵} \\ \hline \text{۴۶۵۰۴۵} \end{array} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{array}{r} \text{۲۸۱} \times \\ \text{۳۳۲} \\ \hline \text{۵۶۲} \\ \text{۸۴۳} \\ \text{۸۴۳} \\ \hline \text{۹۳۲۹۲} \end{array}$$

۶. اگر عدد مجهول، برابر واحد باشد، مجموع دو عدد دیگر برابر ۴ و مجموع سه عدد برابر ۵ می‌شود. به‌این‌ترتیب، باید مجموع سه‌عدد، یعنی p^p، بر ۵ بخش‌پذیر باشد و عدد مجهول، برابر $\frac{۱}{۵}$ این مجموع است.

ولی بنابه فرض، p عددی است اول و، بنابراین، عدد

$$p^p = p \times p \times p \times \ldots$$

وقتی بر ۵ بخش‌پذیر است که داشته‌باشیم: $p = ۵$. پس، مجموع سه عدد برابر

$$۵^۵ = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۳۱۲۵$$

و عدد مجهول چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{۵} \times ۳۱۲۵ = ۶۲۵$$

۷. در بسیاری موردها، برای پیدا کردن یک یا چند عدد، باید به جست‌وجو پرداخت؛ عددهایی را که می‌توانند جواب باشند، مورد آزمایش قرار داد که، درنتیجه، یا جواب موردنظر پیدا می‌شود ویا روشن می‌شود که مساله جواب ندارد.

ولی این جست‌وجو، نباید همراه با ناآگاهی و به‌اصطلاح «کور» باشد. وقتی چیزی را گم کرده‌اید، تمام شهر یا محله و یا سراسر منزل خود را مورد

جست‌وجو قرار نمی‌دهید، بلکه می‌اندیشید که احتمال وجود این چیز در کجاها می‌تواند باشد؛ یعنی در آغاز، محدودهٔ مورد جست وجو را تنگ و تنگ‌تر می‌کنید و، سپس، به‌دنبال آن‌چه موردنظرتان است، می‌روید.

به مسالهٔ خودمان برمی‌گردیم. درآغاز، نمی‌دانیـم، آیا این مساله جواب دارد یانه! البته می‌توان، عددهای طبیعی را از عدد ۱ درنظر گرفت و، برای هر عدد، مجذور و مکعب آن را پیدا کرد تا، اگر مساله جواب داشته‌باشد، به‌آن برسیم. ولی این، همان «روش کور» است و به‌جز وقت زیادی که از ما می‌گیرد و، به‌دلیل «کور بودن» و «طولانی بودن» خود، کسالت‌آور و خسته‌کننده است (و چه‌بسا، ما را از ادامه کار منصرف کند)، روشن نیست درکجا باید جست‌وجو را قطع کرد!

صورت مساله و شرط‌های آن را، با دقت مرور کنیم. دو عدد، روی‌هم ۱۰ رقم دارند . . . آیا ممکن است، این دوعدد، یکی مجذور و دیگری مکعب یک عدد سه‌رقمی باشند؟ کوچکترین عدد سه‌رقمی برابر است با ۱۰۰ و داریم:

$$۱۰۰^۲ = ۱۰۰۰۰;$$
$$۱۰۰^۳ = ۱۰۰۰۰۰۰$$

مجذور ۱۰۰، عدد ۵رقمی و مکعب آن عدد ۷رقمی است، روی‌هم ۱۲ رقم. ولی ما بیش از ۱۰ رقم نداریم. اما

$$۹۹^۲ = ۹۸۰۱ \quad \text{(چهار رقم)};$$
$$۹۹^۳ = ۹۷۰۲۹۹ \quad \text{(شش رقم)}$$

بنابراین، عددی که مجذور و مکعب آن، روی‌هم ۱۰رقم داشته‌باشد، دورقمی است (البته، کنار گذاشتن عددهای یک‌رقمی، امری روشن است).

آیا همهٔ عددهای دورقمی را مورد آزمایش قرار دهیم؟ نه! مثلاً

$$۴۵^۲ = ۲۰۲۵ \quad (\text{چهار رقم});$$
$$۴۵^۳ = ۹۱۱۲۵ \quad (\text{پنج رقم})$$

دو عدد، روی‌هم، ۹رقم دارند. درواقع، نخستین عدد دورقمی که مجذور و مکعب آن، روی‌هم ۱۰رقم دارند، عدد ۴۷ است:

$$۴۷^۲ = ۲۲۰۹ \quad (\text{چهار رقم});$$
$$۴۷^۳ = ۱۰۳۸۲۳ \quad (\text{شش رقم})$$

به‌این‌ترتیب، تنها باید عددهای از ۴۷ تا ۹۹ را مورد آزمایش قرار داد. درضمن، معلوم شد، خود عددهای ۴۷ و ۹۹ را هم باید کنار گذاشت، زیرا مجذور و مکعب آن‌ها، از همهٔ رقم‌ها استفاده نشده‌است و در آن‌ها، رقم‌های تکراری هم وجود دارد. تنها ۵۱ عدد برای آزمایش، باقی می‌ماند:

$$۴۸, ۴۹, ۵۰, \ldots, ۹۸$$

باز هم دقت کنیم. شاید بتوانیم تعداد آن‌ها را کمتر کنیم. چهار نوع عدد وجود دارد که رقم سمت راست مجذور و مکعب آن‌ها، یکی است: عددهایی که به ۰، ۱، ۵ یا ۶ ختم شوند. مثلاً

$$۵۵^۲ = ۳۰۲۵;$$
$$۵۵^۳ = ۱۶۶۳۷۵$$

بنابراین، دست‌کم رقم آخر آن‌ها، تکراری است. این عددها راهم کنار می‌گذاریم. در بین عددهای از ۴۸ تا ۹۸، پنج عدد به ۰، پنج عدد به ۱، پنج عدد به ۵ و پنج عدد به ۶ ختم می‌شوند، روی‌هم ۲۰ عدد. اگر این ۲۰ عدد راهم از محدودهٔ آزمایش خود خارج کنیم، ۳۱ عدد می‌ماند.

ضمن آزمایش، اگر در مجذور عدد، رقم تکراری وجود داشته‌باشد، لزومی ندارد، مکعب آنرا هم، به‌دست بیاوریم. مثلاً

$$۵۶^۲ = ۳۱۳۶$$

که درآن، رقم ۳ تکرار شده‌است و، بنابراین، باشرط مساله سازگار نیست.

درضمن، لازم نمی‌شود، همهٔ این عددها را آزمایش کنیم، زیرا وقتی به عدد ۶۹ برسیم، به‌دست می‌آید:

$$۶۹^۲ = ۴۷۶۱$$

$$۶۹^۳ = ۳۲۸۵۰۹$$

که باهمهٔ شرط‌های مساله می‌سازد. بنابراین پاسخ مساله، این دوعدد است:

$$۳۲۸۵۰۹ \text{ و } ۴۷۶۱$$

البته، اگر بخواهیم ثابت کنیم که: مساله پاسخ دیگری ندارد، باید عددهای از ۷۲ تا ۹۸ راهم مورد آزمایش قرار دهیم.

۸. این، از آن مساله‌هایی است که هیچ قاعده و قانونی، برای پیدا کردن جواب نمی‌توان پیدا کرد. تنها پی‌گیری، تلاش و حوصله می‌تواند ما را به نتیجه برساند. در این‌جا برای هر حالت یک جواب داده شده‌است:

$$۱۲۳ - ۴۵ - ۶۷ + ۸۹ = ۱۰۰;$$

$$۹۸ - ۷۶ + ۵۴ + ۳ + ۲۱ = ۱۰۰$$

۹. *پاسخ:* a) ۱؛ b) ۵؛ c) ۰

۱۰. *پاسخ:* $۱۰۰۰ = ۷۶ + ۴۶۱ + ۲۸۱ + ۱۶۹ + ۱۳$

۱۱. بلافاصله روشن می‌شود که چلنگر، نه بهروز است ونه سروش، زیرا بهروز خواهر دارد و سروش، دربین سه نفر از همه کوچکتر نیست.

بنابراین، چلنگر، همان مزدک است. سروش، نمی‌تواند تراشکار باشد؛ چون درصورت مساله گفته شده‌است: «سروش از تراش‌کار، بزرگتر است». بنابراین، سروش، همان جوش‌کار است.

پاسخ: بهروز: تراش‌کار؛ مزدک، چلنگر؛ سروش: جوش‌کار.

۱۲. این مساله و مسالهٔ قبل، در گروه مساله‌هایی قرار دادند که، به آن‌ها، **مساله‌های منطقی** می‌گویند و، به‌نظر من، هر دانش‌آموزی باید به آن‌ها بپردازد. درواقع، هر انسانی در هر گام، با «مساله‌هایی»ـ گاه ساده و گاه دشوار ـ مواجه می‌شود که باید آن‌ها را به‌صورتی «معقول» و «منطقی» حل کند، و اگر به «استدلال و داوری منطقی» عادت نکرده‌باشد، نمی‌تواند مسیر درست زندگی خود را پیدا کند.

حل «مساله‌های منطقی»، گرچه به‌ظاهر، ربطی به ریاضیات ندارد، ولی درواقع، موجب تقویت اندیشه و بارور شدن استدلال ذهنی (برپایهٔ واقعیت‌ها) می‌شود، و این همان چیزی است که در ریاضیات، به‌آن نیازمندیم.

مساله‌های منطقی با «چیستان‌ها» از این جهت اختلاف دارند که، در آن‌ها، نه بازی با واژه‌ها وجود دارد ونه تلاشی برای گمراه کردن خواننده است.

همچنین، مساله‌های منطقی با مساله‌های ریاضی این تفاوت را دارند که، در آن‌ها، نیازی به هیچ‌گونه آگاهی از درس‌ها، مفهوم‌ها و قضیه‌های ریاضی نیست.

در مساله‌های منطقی، تنها از حکم‌هایی استفاده می‌شود که برای همه‌کس، روشن و بدیهی‌اند، مثل: پدر از پسر خود بزرگتر است؛ در تیم والیبال، یا همه مردند یا همه زن، سرهنگ بزرگتر از سرگرد است و غیره.

بهترین و مناسب‌ترین روش، برای حل مساله‌های منطقی (که البته، تنها روش حل این‌گونه مساله‌ها نیست)، عبارت‌است از تنظیم جدولی که، درآن بتوان همه حالت‌های ممکن را نشان داد. مثلاً، برای مساله ۱۲؛ این جدول

چنین است:

	بالرین	نقاش	خواننده	نویسنده
توکا				
مژده				
سهراب				
رامین				

اگر مثلاً متوجه شدیم که، مژده، نمی‌تواند بالرین باشد، آن‌وقت در جدول، درسطر جلو مژده و در ستون زیر بالرین، نشانهٔ «منفی (ـ)» می‌گذاریم. یا اگر به‌این نتیجه رسیدیم که توکا، همان نقاش است، جلو نام توکا و در ستون نقاش، علامت مثبت (+) می‌گذاریم. وقتی تمامی جدول به‌همین صورت نشانه‌گذاری شود و در برابر هر نام، تنها یک نشانهٔ «مثبت» وجود داشته‌باشد، آن‌وقت مساله به‌طور کامل حل شده‌است.

اکنون به‌حل مسالهٔ ۱۲ می‌پردازیم.

از شرط اول معلوم می‌شود که، توکا و سهراب، هیچ‌کدام خواننده نیستند. بنابراین، می‌توانیم، در خانه‌های مربوط، نشانهٔ منفی بگذاریم. از شرط دوم متوجه می‌شویم، مژده نه نقاش است و نه نویسنده، و از شرط سوم می‌فهمیم، رامین و توکا نویسنده نیستند. اگر نشانه‌های «منفی» را درجای خود قرار دهیم، جدول به‌این‌صورت درمی‌آید.

	بالرین	نقاش	خواننده	نویسنده
توکا			—	—
مژده		—		—
سهراب			—	
رامین				—

تا همین‌جا، معلوم می‌شود که سهراب، نویسنده است (این روش را، **روش حذف** می‌گویند، با روش حذف به نویسنده بودن سهراب پی بردیم). جلو نام

سهراب و زیر ستون نویسنده، نشانه «مثبت» و زیر سه ستون دیگر (بالرین، نقاش و خواننده) نشانهٔ «منفی» می‌گذاریم.

اکنون، شرطهای ۲ و ۴ را باهم مقایسه می‌کنیم: سهراب به دیدار نقاش، رفته‌است، درضمن، توکا، سهراب را نمی‌شناسد. یعنی توکا، نقاش نیست و پیش‌از این دیدیم که توکا، نه خواننده است و نه نویسنده. بنابراین، تنها یک حالت باقی می‌ماند: توکا، بالرین است. نشانهٔ «مثبت» را در خانهٔ موردنظر می‌گذاریم. دراین‌صورت مژده و رامین، نمی‌توانند بالرین باشند. پس مژده خواننده است. و سرانجام، رامین، تنها می‌تواند نقاش باشد. مساله، به‌طور کامل، حل شد.

۱. مجموعه‌ها

۱۳. الف) مجموعهٔ عددهای یک‌رقمی (به‌عنوان مثال):

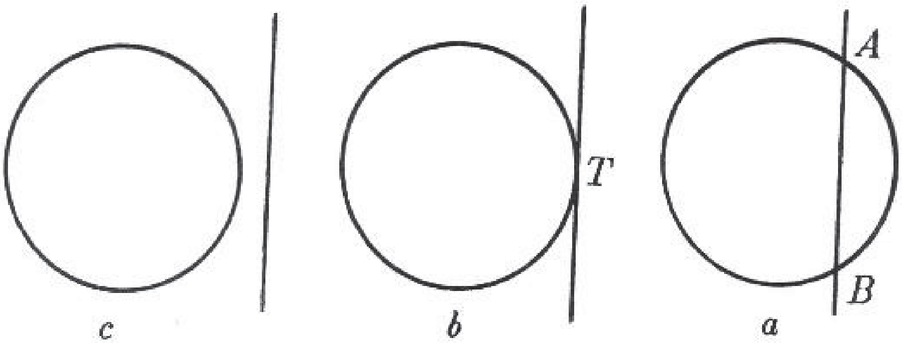
$$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

ب) مثلاً، مجموعهٔ قمرهای طبیعی مریخ. مریخ تنها دو قمر طبیعی دارد: فوبوس و دیموس. یا مجموعهٔ عددهای یک‌رقمی غیرصفر و بخش‌پذیر بر ۴:

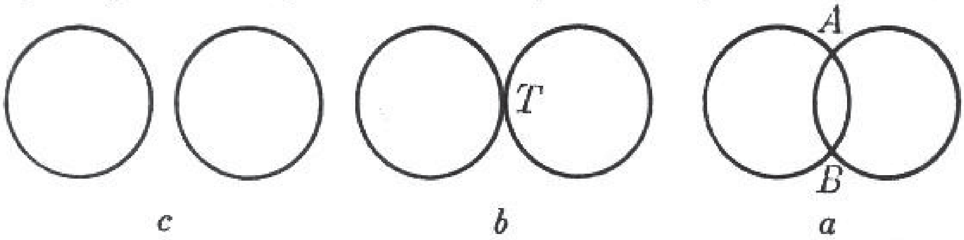
$$\{۴, ۸\}$$

ت) مثلاً مجموعهٔ قمرهای طبیعی زمین؛ زمین تنها یک قمر طبیعی دارد: ماه؛ مجموعهٔ عددهای اول بین دو عدد ۸۹ و ۱۰۱ $\{۹۷\}$؛ ۹۷ تنها عدد اول بین ۸۹ و ۱۰۱ است.

ث) هر مجموعهٔ تهی، مثل مجموعهٔ عددهای اول بین ۱۱۳ و ۱۲۷ (بین این دوعدد، هیچ عدد اولی وجود ندارد)؛ یا مجموعهٔ پزشکان ۳ساله؛ یا مجموعهٔ اتومبیل‌های یک چرخ، یا مجموعهٔ مثلث‌های چهار زاویه.



شکل ۲۹ : a) خط راست و دایره، دو نقطه مشترک دارند b) خط راست و دایره، یک نقطه مشترک دارند c) خط راست و دایره، نقطه مشترک ندارند



شکل ۳۰ : a) دایره‌ها، دو نقطه مشترک دارند b) دایره‌ها، یک نقطه مشترک دارند c) دایره‌ها، نقطه مشترک ندارند

۱۴. این مجموعه می‌تواند دو عضو داشته‌باشد (وقتی خط راست، دایره را قطع می‌کند) یا یک عضو (وقتی خط راست بر دایره مماس باشد) و می‌تواند مجموعه‌ای تهی باشد (وقتی خط راست در بیرون دایره باشد). سه‌حالت را در شکل ۲۹ می‌بینید.

۱۵. دو دایره می‌توانند دو نقطه یا یک نقطهٔ مشترک داشته‌باشند ویا نقطهٔ مشترکی نداشته باشند (شکل ۳۰)

یادداشت. در بیان موضوع‌هایی که به ریاضیات مربوط می‌شوند، از جمله‌های مبهم یا جمله‌هایی که تردید ایجاد می‌کند، پرهیز کنید. بهتر است، برای خط راست و دایره یا دو دایره، از واژهٔ «نقطه‌های مشترک» استفاده کنید، زیرا معمولاً درحالت مماس بودن خط راست بر دایره یا مماس بودن دو دایره برهم، نمی‌گویند «نقطهٔ برخورد». «نقطهٔ برخورد» یا «نقطهٔ تقاطع» را برای حالت a (در شکل‌های۲۹ و ۳۰) به‌کار ببرید و برای حالت b (شکل‌های ۲۹ و ۳۰) از واژهٔ «نقطهٔ مشرک» یا «نقطهٔ تماس» استفاده کنید.



شکل ۳۱ : a) *خط‌های راست، یک نقطه برخورد دارند* b) *خط‌های راست، نقطه برخوردی ندارند*

۱۶. یک یا هیچ (شکل ۳۱).

۱۷. نه! مجموعهٔ تهی با مجموعهٔ $\{0\}$ فرق دارد.

$$\phi \neq \{0\}$$

مجموعهٔ تهی عضوی ندارد، درحالی‌که مجموعهٔ $\{0\}$ یک مجموعهٔ یکانی است، یعنی دارای یک عضو (عدد صفر) است.

۱۸. بله. ۱ یک عدد است، درحالی‌که $\{1\}$، یک مجموعه است. ۱ عضو مجموعهٔ $\{1\}$ است.

۱۹. معمولاً، و به‌ویژه در ریاضیات، یک مجموعه نمی‌تواند عضو خودش باشد:

مجموعهٔ مربع‌ها، خودش مربع نیست؛

مجموعهٔ عددهای طبیعی، خودش یک عدد نیست و . . .

ولی مثلاً می‌توان این مجموعه را درنظر گرفت:

«مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها»

اگر «مجموعهٔ همه مجموعه‌ها» را A بنامیم، به‌ظاهر A می‌تواند عضو خودش باشد، زیرا A هم یک مجموعه است. ولی *برتراندراسل*، ریاضی‌دان و فیلسوف انگلیسی، ثابت کرد که درهرحال (چه A را عضو خودش بدانیم و چه A را عضو خودش ندانیم)، ازنظر منطقی دچار تناقض می‌شویم.

... دراین‌جا، از بحث تفصیلی دراین‌باره می‌گذریم، چراکه در ریاضیات، با مجموعه‌هایی کار می‌کنیم که کاملاً معین‌اند، عضو خودشان نیستند و، بنابراین، ضمن عمل با آن‌ها، دچار تناقض نمی‌شویم.

اکنون خودتان، به‌این پرسش پاسخ دهید.

چرا ϕ با $\{\phi\}$ فرق دارد و چرا $\{\phi\}$ عضو خودش نیست؟

۲۰. الف) چون $۱ = \frac{۱+۴}{۱۰-۵}$ و $۲ = \frac{۴}{۲}$، دو مجموعه برابرند،

ب) بله، برابرند، پ) بله، ت) نه! اگر مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۴ و ۶ را، A و مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۲۴ را B بنامیم، داریم:

$$A = \{۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, \ldots\}$$
$$B = \{۲۴, ۴۸, ۷۲, \ldots\}$$

می‌بینیم که A نسبت‌به B، پرعضوتر است و شامل عضوهایی است که عضو مجموعهٔ B نیستند. بنابراین، مجموعه‌های A و B برابر نیستند.

***یادداشت.** اگر عدد m بر دوعدد a و b بخش‌پذیر باشد، به‌شرطی بر حاصل‌ضرب ab بخش‌پذیر است که a و b نسبت به‌هم اول باشند (یعنی مقسوم‌علیه مشترکی نداشته‌باشند؛ به‌زبان دیگر، هر دو عدد a و b، به‌جز ۱، برهیچ عدد دیگری، با هم بخش‌پذیر نباشند). مثلاً اگر عددی بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، بر ۶ بخش‌پذیر است؛ یا عدد بخش‌پذیر بر ۳ و ۴ بر ۱۲؛ و عدد بخش‌پذیر بر ۱۴ و ۲۵ بر ۳۵۰ بخش‌پذیر است.

۴ و ۶ نسبت به‌هم اول نیستند (هردوی آن‌ها، بر ۲ بخش‌پذیرند)، بنابراین اگر عددی هم بر ۴ و هم بر ۶ بخش‌پذیر باشد، ممکن است بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد.

ث) نه! در مجموعهٔ نخست، عدد ۹۱ عددی اول نیست، زیرا

$$۹۱ = ۷ \times ۱۳$$

ج) بله. هردو، مجموعه‌هایی تهی‌اند.

چ) بله، زیرا

$$\circ/\text{۳۵} = \frac{\text{۷}}{\text{۲۰}} = \frac{\text{۱/۷۵}}{\text{۵}}$$

۲۱. نه، زیرا ۰/۲۵ و $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ دو عضو مختلف نیستند.

۲۲. اگر صورت کسر را برابر واحد بگیریم، ۸ کسر با شرط‌های مساله به‌دست می‌آید:

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \frac{\text{۱}}{\text{۳}}, \frac{\text{۱}}{\text{۴}}, \frac{\text{۱}}{\text{۵}}, \frac{\text{۱}}{\text{۶}}, \frac{\text{۱}}{\text{۷}}, \frac{\text{۱}}{\text{۸}}, \frac{\text{۱}}{\text{۹}}$$

با صورت برابر ۲، ۴ کسر (مخرج باید از صورت بزرگتر باشد و، درضمن، زوج هم نباشد):

$$\frac{\text{۲}}{\text{۳}}, \frac{\text{۲}}{\text{۵}}, \frac{\text{۲}}{\text{۷}}, \frac{\text{۲}}{\text{۹}}$$

و به‌همین‌ترتیب، ۴ کسر با صورت برابر ۳:

$$\frac{\text{۳}}{\text{۴}}, \frac{\text{۳}}{\text{۵}}, \frac{\text{۳}}{\text{۷}}, \frac{\text{۳}}{\text{۸}}$$

سه کسر، را صورت برابر ۴

$$\frac{\text{۴}}{\text{۵}}, \frac{\text{۴}}{\text{۷}}, \frac{\text{۴}}{\text{۹}}$$

چهار کسر باصورت برابر ۵

$$\frac{\text{۵}}{\text{۶}}, \frac{\text{۵}}{\text{۷}}, \frac{\text{۵}}{\text{۸}}, \frac{\text{۵}}{\text{۹}}$$

یک کسر با صورت برابر ۶: $\frac{\text{۶}}{\text{۷}}$؛ دوکسر با صورت برابر ۷ : $\frac{\text{۷}}{\text{۸}}$ و $\frac{\text{۷}}{\text{۹}}$ و سرانجام یک کسر با صورت برابر ۸ : $\frac{\text{۸}}{\text{۹}}$.

روی‌هم ۲۷ کسر. مجموعهٔ ما دارای ۲۷ عضو است. در این‌جا، عضوهای مجموعه را، به‌ترتیب صعودی، از چپ به‌راست نوشته‌ایم:

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7},$$

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$$

یادداشت. می‌دانید، ازبین دو کسر با مخرج‌های برابر، کسری کوچکتر است که صورت کوچکتر داشته‌باشد؛ از بین دوکسر با صورت‌های برابر، کسری کوچکتر است که مخرج بزرگتر داشته‌باشد؛ درضمن می‌توانیم دوکسر غیرمشخص را به‌یک صورت، یا به‌یک مخرج تبدیل کنیم. مثلاً برای دوکسر $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{7}$؛ اگر صورت و مخرج کسر اول را بر ۲ و صورت و مخرج کسر دوم را بر ۳ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2/5} \text{ و } \frac{3}{7} = \frac{1}{2/33}$$

چون ۲/۵ از ۲/۳۳ بزرگتر است، پس $\frac{2}{5}$ از $\frac{3}{7}$ کوچکتر است.

همچنین می‌توانستیم، صورت و مخرج کسر اول را در ۷ و صورت و مخرج کسر دوم را در ۵ ضرب کنیم:

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} \text{ و } \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

مخرج‌ها برابرند. چون ۱۴ از ۱۵ کوچکتر است، پس $\frac{2}{5}$ از $\frac{3}{7}$ کوچکتر است.

ولی برای مقایسهٔ دوکسر، اغلب می‌توان از این قانون هم استفاده کرد:

اگر به‌صورت و مخرج کسری، یک عدد اضافه‌کنیم، این کسر به‌واحد نزدیکتر می‌شود، یعنی اگر در آغاز از واحد کوچکتر باشد، بعد از اضافه

شدن یک عدد به‌صورت و مخرج آن، بزرگتر می‌شود و، برعکس، اگر در آغاز از واحد بزرگتر باشد، با اضافه کردن عددی به‌صورت و مخرج، کوچکتر می‌شود.

مثلاً، اگر بخواهیم این دوکسر را باهم مقایسه کنیم:

$$\frac{۲۴}{۹۷} \text{ و } \frac{۲۴۵۷}{۹۷۴۳}$$

روشن است، تبدیل این دوکسر به کسرهایی که مخرج‌های برابر داشته‌باشند، وقت زیادی می‌گیرد و کسالت‌آور است. این‌طور استدلال می‌کنیم:

$$۱) \quad \frac{۲۴}{۹۷} = \frac{۲۴۰۰}{۹۷۰۰}$$

(صورت و مخرج را، ۱۰۰ برابر کردیم.)

$$۲) \quad \frac{۲۴۴۳}{۹۷۴۳} > \frac{۲۴۰۰}{۹۷۰۰} = \frac{۲۴}{۹۷}$$

(کسر $\frac{۲۴۰۰}{۹۷۰۰}$ از واحد کوچکتر است، پس وقتی به‌صورت و مخرج آن، ۴۳ واحد اضافه کنیم، کسر بزرگتر می‌شود.)

$$۳) \quad \frac{۲۴۵۷}{۹۷۴۳} > \frac{۲۴۴۳}{۹۷۴۳}$$

(از دوکسر با مخرج‌های برابر، کسری بزرگتر است که صورت بزرگتر دارد.)

اکنون از نتیجه‌های ۲ و ۳ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲۴۵۷}{۹۷۴۳} > \frac{۲۴۴۳}{۹۷۴۳} > \frac{۲۴}{۹۷}$$

یعنی کسر $\frac{۲۴۵۷}{۹۷۴۳}$ از کسر $\frac{۲۴}{۹۷}$ بزرگتر است.

۲۳. عضوهای این مجموعه را می‌توان عکس عضوهای مجموعهٔ مسالهٔ ۲۲ دانست. ولی کسری که مخرج واحد داشته‌باشد، کسر نیست، بلکه عددی درست است.

۲۴. پاسخ:

$$A = \{۷\}; \quad B = \{-۲, ۲\};$$
$$C = \{ی, ت, س, و, د\}$$

۲۵. A مجموعه‌ای تهی است، زیرا $x^۲ + ۱$ به‌ازای یک عدد حقیقی، نمی‌تواند برابر صفر شود: $A = \phi$.

B مجموعهٔ تهی نیست و یک عضو دارد: $x = ۰$؛ $\{۰\} = B$.

۲۶. الف) نادرست؛ $\{۰\}$ یک مجموعه است و دربین عضوهای مجموعهٔ $\{۰, ۱\}$، چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. ب) نادرست؛ ϕ، مجموعهٔ تهی است و مجموعهٔ تهی عضو مجموعهٔ $\{۰, ۱\}$ نیست. پ) و ت) درست. ث) نادرست. ج) درست.

۲۷. $\{\{۰, ۱\}\}$ یک مجموعهٔ یکانی است، یعنی تنها یک عضو دارد؛ این عضو خودش یک مجموعه است. مجموعه $\{۰, ۱\}$.

۲۸. الف، ب)، پ) و ت) نادرست؛ ث) درست و ج) نادرست.

۲۹. پاسخ: همه درست‌اند.

۳۰. بله. زیرا A یک مجموعهٔ تهی است و مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

۳۱. الف)، ب) و پ) درست‌اند؛ ج) نادرست است.

۳۲. پاسخ:

$$\phi;$$
$$\{۱\}; \{۲\}; \{۳\};$$

$$\{۱,۲\}; \{۱,۳\}; \{۲,۳\};$$
$$\{۱,۲,۳\}$$

۳۳. پاسخ:

$$\phi;$$
$$\{x\}; \{y\}; \{z\};$$
$$\{x,y\}; \{x,z\}; \{y,z\};$$
$$\{x,y,z\}$$

۳۴. به دوصورت می‌توان نوشت (واژهٔ «مجموعه» را تکرار نکرده‌ایم):

مربع‌ها $\subset$ لوزی‌ها $\subset$ متوازی‌الاضلاع‌ها $\subset$ ذوزنقه‌ها $\subset$ چهارضلعی‌ها ;

مربع‌ها $\subset$ مستطیل‌ها $\subset$ متوازی‌الاضلاع‌ها $\subset$ ذوزنقه‌ها $\subset$ چهارضلعی‌ها

۳۵. A یک مجموعهٔ تهی است، زیرا از $A \subset \phi$ (فرض) و $\phi \subset A$ (ϕ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است) نتیجه می‌شود. $A = \phi$.

۳۶. پاسخ: $A \subset B$.

۳۷. اگر مجموعهٔ عددهای طبیعی، یعنی مجموعهٔ A را، مجموعهٔ مادر یا مرجع بگیریم، داریم:

$$B \subset A, C \subset A$$

درضمن، نسبت به مجموعهٔ مرجع A، مجموعهٔ B متمم مجموعهٔ C و مجموعهٔ C متمم مجموعه B است. همچنین می‌توان نوشت:

$$C = A - B \text{ و } B = A - C$$

۳۸. برای حل این مساله، کافی است، به‌قضیهٔ بسیار ساده‌ای توجه کنیم:

اگر یک عضو به عضوهای مجموعه‌ای اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن، دوبرابر می‌شود.

درواقع، همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اول، زیرمجموعه‌های مجموعهٔ دوم هم هستند، درضمن، اگر عضو جدید را به عضوهای هریک از زیرمجموعه‌های قبلی اضافه کنیم، باز هم زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ جدید به‌دست می‌آید و، به‌این‌ترتیب با اضافه کردن یک عضو به عضوهای مجموعه، تعداد زیرمجموعه‌های آن دوبرابر می‌شود.

مجموعهٔ یکانی (مجموعه‌ای که یک عضو دارد) دارای دو زیرمجموعه است: ϕ و خود مجموعه.

مجموعه‌ای که دو عضو داشته‌باشد، دارای ۲×۲، یعنی $۲^۲$ یا ۴ زیرمجموعه است:

مجموعهٔ تهی؛ دو مجموعهٔ یک‌عضوی و یک مجموعهٔ دوعضوی.

به‌همین‌ترتیب، باتوجه به قضیهٔ بالا مجموعهٔ سه‌عضوی دارای ۲×۲^۲، یعنی $۲^۳$ یا ۸ زیرمجموعه است؛

مجموعهٔ چهارعضوی دارای ۲×۲^۳، یعنی $۲^۴$ یا ۱۶ زیرمجموعه است؛

و سرانجام، مجموعهٔ nعضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است.

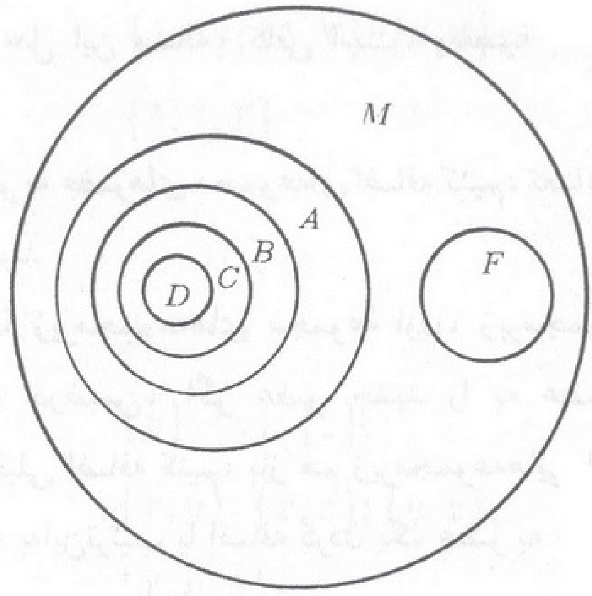
۳۹. پاسخ را درشکل ۳۲ می‌بینید.

یعنی $F \subset M$ و $D \subset C \subset B \subset A \subset M$.

۲. عمل با مجموعه‌ها

۴۰. *پاسخ:* همهٔ رابطه‌ها درست‌اند.

۴۱. از برابری $A \cup B = A$ نتیجه می‌شود که B باید زیرمجموعه‌ای از A باشد $(B \subset A)$ واز $B \cup A = B$ نتیجه می‌شود: $A \subset B$ و،



شکل ۳۲

بنابراین $A = B$.

۴۲. ۱) $Q \cap R = \{۲, ۴\}$ و $S \cap T = \phi$، پس

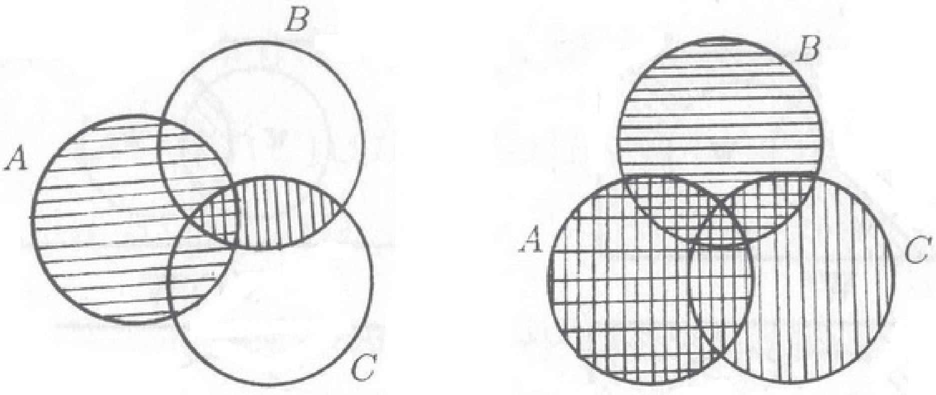
$$(Q \cap R) \cup (S \cap T) = \{۲, ۴\} \cup \phi = \{۲, ۴\}$$

۲) ϕ؛ ۳) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸\}$؛ ۴) $\{۴\}$؛ ۵) $\mathbf{R}$.

۴۳. از $E \cup F = E$ نتیجه می‌شود $F \subset E$ واز $F \cap E = E$ نتیجه می‌شود $E \subset F$، پس $E = F$.

۲) طبق فرض داریم $F \subset E$ و از $E \cap F = E$ نتیجه می‌شود $E \subset F$ پس $E = F$. عکس دو گزاره را خودتان ثابت کنید.

۴۳. در $A \cup B$، همهٔ عضوهای مجموعهٔ B وجود دارد، پس در مجموعهٔ $B \cap C$ هم باید همهٔ عضوهای B وجود داشته‌باشد و این به‌شرطی ممکن است که B زیرمجموعه‌ای از C باشد. پس $B \subset C$ (در حالت خاص، ممکن است $B = C$). بنابراین به برابری $A \cup B = B$ می‌رسیم و این، به‌معنای آن است که $A \subset B$ (در حالت خاص، ممکن است $A = B$).



$A\cup(B\cap C)$ $\quad$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

شکل ۳۳

پاسخ. $A\subset B\subset C$.

۴۵. پاسخ را در شکل ۳۳ می‌بینید

۴۶. الف) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

ب) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۴۷. از فرض $A\cap B=\phi$ معلوم می‌شود، دو مجموعهٔ A و B، عضو مشترکی ندارند و از هم جدا هستند، یعنی اگر $x\in A$، آن‌وقت $x\notin B$؛ ولی $x\notin B$ به‌معنای $x\in B'$ است. پس هر عضو A، درضمن عضو B' است و درنتیجه $A\subset B'$.

۴۸. پاسخ‌ها را درشکل ۳۴ ببینید (صفحهٔ ۲۳۴).

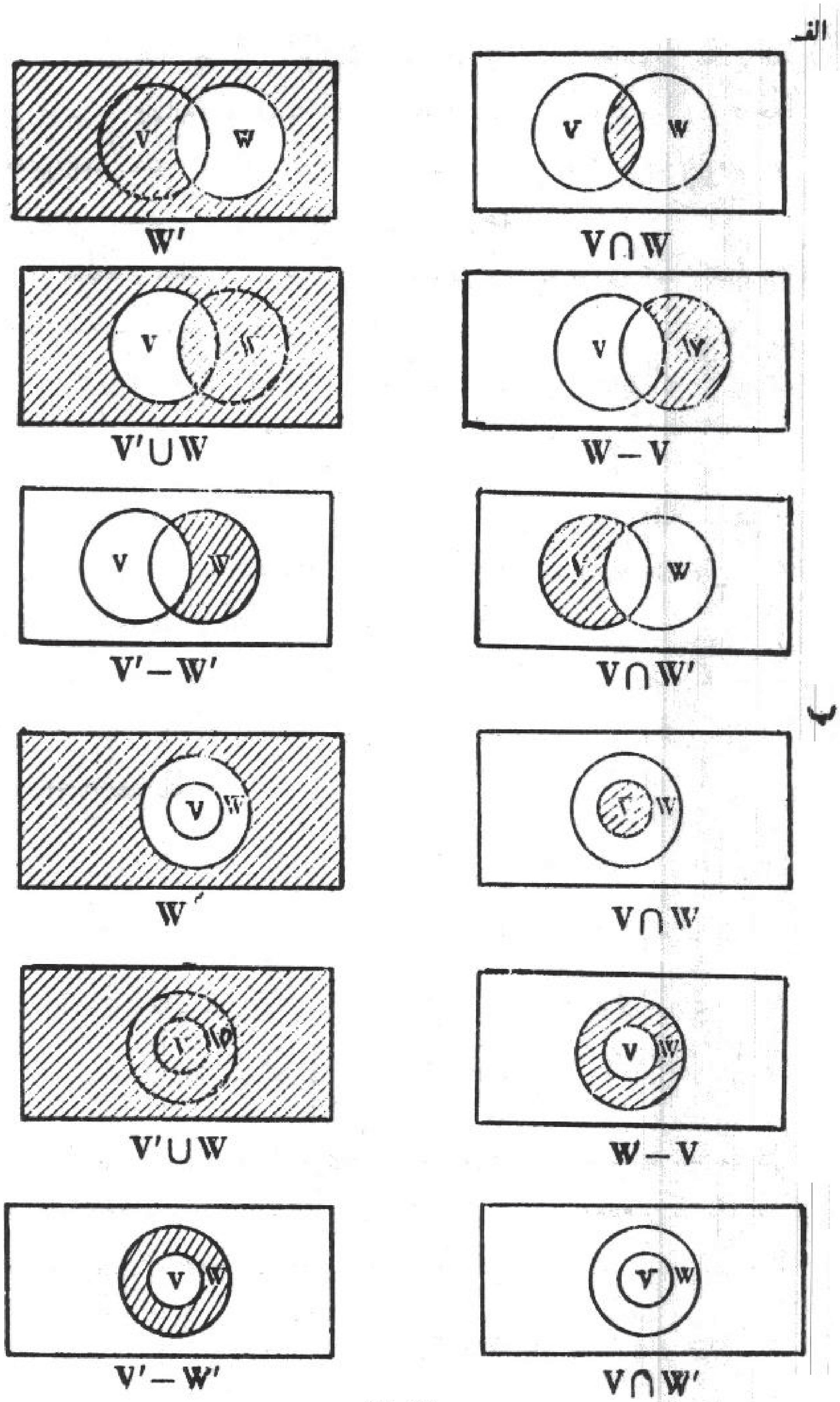
۴۹. الف) $(A-B)\subset A$؛ ب) $(A\cap B)\subset A$؛ پ) $(B-A)\subset A'$؛ ت) $A\subset(A\cup B)$.

۵۰. پاسخ: $A\cup B=(A'\cap B')'$.

۵۱. باتوجه به ویژگی پخشی (مساله ۴۵ را ببینید) داریم:

$$A\cup(A'\cap B)=(A\cup A')\cap(A\cup B)=$$
$$=M\cap(A\cup B)=A\cup B$$

یعنی $X=A\cup B$.



شکل ۳۴

برای محاسبه Y، اگر درآغاز، پرانتز $A \cap C'$ را کنار بگذاریم، داریم

$$(A \cap B' \cap C) \cup B = B \cup [B' \cap (A \cap C)] =$$
$$= B \cup (A \cap C);$$

اکنون پرانتزی را که کنار گذاشته‌بودیم، وارد می‌کنیم:

$$B \cup (A \cap C) \cup (A \cap C') = B \cup [A \cap (C \cup C')] =$$
$$= B \cup (A \cap M) = B \cup A$$

یعنی $Y = B \cup A$.

۵۲. ۱) برای سادگی کار، به‌جای نمادهای $\cup$ و $\cap$، به‌ترتیب از نماده‌های سادهٔ جمع و ضرب استفاده می‌کنیم، یعنی $A \cup B$ را به‌صورت $A + B$ و $A \cap B$ را به‌صورت AB می‌نویسیم. دراین‌صورت، عبارت Z، چنین می‌شود:

$$Z = C(A' + B')(A + C') + A'BC + ABC'$$

ابتدا، جملهٔ اول این عبارت را ساده می‌کنیم:

$$C(A' + B')(A + C') = (CA' + CB')(A + C') =$$
$$= AA'C + AB'C + CC'A' + CC'B' =$$
$$= \phi + AB'C + \phi + \phi = AB'C$$

بنابراین، عبارت‌ها چنین می‌شود:

$$Z = A'BC + AB'C + ABC' \qquad (۱)$$

که با استفاده از نمادهای اصلی چنین می‌شود:

$$Z = (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$$

درضمن، باتوجه به این‌که AA'، BB' و CC' مجموعه‌هایی تهی هستند، برابری (۱) قابل تجزیه است:

$$Z = (AB + BC + CA)(A' + B' + C')$$

درنتیجه، Z را به‌این صورت هم می‌توان نوشت:

$$Z = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)] \cap (A' \cup B' \cup C')$$

۲) عبارت T، با نمادهای سادهٔ جمع و ضرب چنین است:

$$T = ABC + A'B'C + A'BC + AB'C$$

که اگر به برابری‌های $A + A' = B + B' = M$ توجه داشته‌باشیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید.

$$T = (ABC + A'BC) + (A'B'C + AB'C) =$$
$$= BC(A + A') + B'C(A + A') =$$
$$= BC + B'C = C(B + B') = C$$

بنابراین: $T = C$.

۵۳. این‌ها، دو قضیه، از دِمورگان (۱۸۰۶-۱۸۷۱ میلادی) ریاضی‌دان اسکاتلندی است و درستی هردوی آن‌ها، به‌سادگی و به‌کمک نمودار وِن ثابت می‌شود.

یادداشت. نام اوگوستوس دِمورگان (Augustus De Morgan) روی مسالهٔ عام‌تری از نظریهٔ مجموعه‌ها، باقی مانده‌است. اگر M را مجموعهٔ مرجع بگیریم، آن‌وقت، اگر در یک گزاره از مجموعه‌ها، جای نمادهای $\cup$ و $\cap$ را باهم و جای مجموعه‌های M و ϕ را باهم عوض کنیم، گزارهٔ جدیدی

به‌دست می‌آید، که آن را «دِمروگانِ گزاره اولی» گویند. مثلاً، دو برابری ۱) و ۲) در مسالهٔ ۵۳، دِمورگانِ یکدیگرند: یا دِمورگانِ برابری $A \cup A' = M$، عبارت است از برابری $A \cap A' = \phi$. همچنین اگر این برابری را درنظر بگیریم:

$$(M \cup B) \cap (A \cup \phi) = A \qquad (۱)$$

دِمورگانِ آن چنین می‌شود:

$$(\phi \cap B) \cup (A \cap M) = A \qquad (۲)$$

خودتان، درستی دو برابری (۱) و (۲) را ثابت کنید.

باز هم دو برابری دِمورگان هم.

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \qquad (۳)$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \qquad (۴)$$

درستی برابری‌های (۳) و (۴) را هم ثابت کنید (مثلاً به‌کمک نمودار وِن).

اکنون، دِمورگانِ هریک از سه برابری زیر را بنویسید و درستی یا نادرستی هریک از شش رابطه را ثابت کنید:

۱) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$;

۲) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$;

۳) $(A \cap M) \cap (\phi \cup A) = \phi$

۵۴. عبارت سمت چپ برابری را X می‌نامیم که، با نمادهای سادهٔ جمع و ضرب، به این‌صورت درمی‌آید:

$$X = ABC + A(B' + C') + A'$$

اکنون، داریم:

$$X = ABC + AB' + AC' + A' = A(BC + B' + C') + A'$$

ازطرف دیگر

$$BC + B' + C' = BC + B'C' = M$$

بنابراین

$$AM + A' = A + A' = M$$

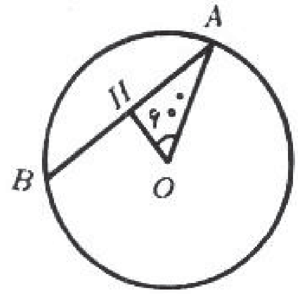
۵۵. *پاسخ:* ۶۰درصد.

۵۶. *راهنمائی.* همیشه، مرکز مستطیل، یعنی نقطهٔ برخورد قطرهای آن، روی مرکز دایره است؛ به‌جز این، می‌توان عرض مستطیل را به‌دلخواه کوچک گرفت، دراین‌صورت، طول آن مرتباً بزگتر و به‌طول قطر دایره نزدیک‌تر می‌شود. به‌این‌ترتیب، هر قطر دایره را می‌توان، مستطیلی به‌شمار آورد که عرض آن برابر صفر است.

پاسخ. اشتراک مستطیل‌ها، تنها نقطه O (مرکز دایره) است، ولی اجتماع آن‌ها، شامل تمامی دایرهٔ (O, R) (نقطه‌های محیط و درون آن) می‌شود.

۵۷. *راهنمائی:* اگر پاره‌خط AB را، وتر کمان ۱۲۰ درجه، (یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ (O, R) فرض کنیم و پاره‌خط راست OH عمود بر این وتر باشد، مثلث قائم‌الزاویه OHA در رأس A، زاویه‌ای ۳۰درجه پیدا می‌کند و، بنابراین، طول پاره‌خط راست OH برابر $\frac{۱}{۲}R$ می‌شود (شکل ۳۵).

پاسخ. اشتراک مجموعهٔ این مثلث‌ها، عبارت از مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط و درون دایرهٔ $(O, \frac{۱}{۲}R)$ و اجتماع آن‌ها، مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط و درون خود دایرهٔ (O, R).



شکل ۳۵

۵۸. این مجموعه‌ها، به‌زبان گسترشی، چنین‌اند:

$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\};$

$B = \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, \ldots\}$ (مجموعه‌ای بی‌پایان)

$C = \{۴, ۵, ۶, ۷, \ldots\} = B$

$D = \phi$ (بین ۴ و ۵ عدد طبیعی وجود ندارد)

پاسخ.

$$A \cap B = \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸\};$$
$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\} = \mathbf{N}$$
$$A \cap D = A \cap \phi = \phi;$$
$$C \cup D = C \cup \phi = C;$$
$$B - C = \phi;$$
$$A - B = \{۱, ۲, ۳\};$$
$$C - A = \{۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, \ldots\}$$

۵۹. الف) D تنها زیرمجموعه مجموعه‌های A و B است؛ مجموعه‌های C، E و F، به‌این دلیل که $s \notin B$ نمی‌توانند زیرمجموعهٔ B باشند.

ب) X می‌تواند برابر C یا E یا F باشد، زیرا هریک از این‌ها، زیرمجموعهٔ C هستند، ولی زیرمجموعهٔ B نیستند.

پ) $X = B$.   ت) $X = B$ یا $X = D$.

۶۰. الف) $A \subset C$ و، بنابراین از $a \in A$ نتیجه می‌شود $a \in C$؛ پس گزارهٔ الف درست است؛

ب) $b \in B$، ولی ممکن است b عضو A نباشد؛ این گزاره ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد؛

پ) عضو $c \in C$ ممکن است به A هم تعلق داشته‌باشد، پس گزارهٔ $c \notin C$ ممکن است نادرست باشد؛

ت) تنها می‌دانیم $d \notin A$، بنابراین لازم نیست به‌طور حتم d عضو B باشد؛ پس این گزاره ممکن است نادرست باشد.

ث) بنابر فرض داریم $e \notin B$ و می‌دانیم $A \subset B$، پس گزارهٔ $e \notin A$ همیشه درست است؛

ج) چون $f \notin C$ و چون $A \subset C$، پس گزارهٔ $f \notin A$ همیشه درست است.

۶۱. نمودار الف) $B \supset A$؛ نمودار ب) $A \cap B \neq \phi$؛ نمودار پ) $A \cap B = \phi$. نمودار ت) $A \subset B$.

۶۲. اگر داشته‌باشیم $x \in B$، آن‌وقت چنانچه x عضو A باشد، باتوجه به‌شرط $(A \cap B) \subset (A \cap C)$، باید x عضو C هم باشد؛ یعنی دراین‌حالت از $x \in B$، نتیجه می‌شود $x \in C$. ولی چنانچه $x \in B$، عضو A نباشد، باتوجه به‌شرط $(A \cup B) \subset (A \cup C)$، باید x عضو $A \cup C$ باشد و چون $x \notin A$، پس $x \in C$.

به‌این‌ترتیب، درهرحال $x \in B$ مستلزم $x \in C$ است، یعنی $B \subset C$.

یادداشت اگر برای مجموعه‌های A، B و C داشتیم:

$$(A \cap B) = (A \cap C) \text{ و } (A \cup B) = (A \cup C)$$

از یک‌طرف، بنابر حل خود مساله $B \subset C$ و ازطرف دیگر، چون می‌توان نوشت:

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ و } A \cup B \subset A \cup C$$

بنابراین $C \subset B$ و درنتیجه $B = C$.

۳. عددهای درست

۶۳. مجموعهٔ عددهای طبیعی، تنها نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته‌است، یعنی مجموع یا حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی، خود یک عدد طبیعی است؛ ولی این مجموعه نسبت به عمل تفریق بسته نیست، زیرا مثلاً حاصل «۱۵ـ۵»، یا حاصل «۷ـ۷» یک عدد طبیعی نیست (۱۰− و ۰، عضوی از مجموعهٔ عددهای طبیعی نیستند).

مجموعهٔ عددهای درست (مثبت، منفی یا صفر)، نسبت به سه عمل جمع، تفریق و ضرب، مجخوعه‌ای بسته است، یعنی نتیجهٔ عمل‌های جمع، تفریق و ضرب دوعدد، بازهم عددی درست است. ولی مجموعهٔ عددهای درست ($\mathbf{Z}$)، نسبت به عمل تقسیم بسته نیست، زیرا مثلاً نتیجهٔ تقسیم «۱۲ : ۷»، عدد درستی نیست.

۶۴. اگر در تقسیم a بر b، خارج‌قسمت برابر q و باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر r شود (البته، r باید از b کوچکتر باشد)، می‌توانیم بنویسیم:

$$a = b \cdot q + r, \quad r < b$$

این برابری را (همراه با نابرابری $r < b$)، **رابطهٔ تقسیم** می‌نامند. همین رابطهٔ تقسیم، روش آزمایش درستی تقسیم را به ما نشان می‌دهد، یعنی اگر عمل تقسیم درست انجام شده‌باشد، باید

اگر حاصل‌ضرب بخشیاب در خارج‌قسمت را با باقی‌ماندهٔ تقسیم جمع کنیم، بخشی (یا مقسوم) به‌دست آید، این، ساده‌ترین و مطمئن‌ترین روش

آزمایش درستی عمل تقسیم است.

*یادداشت. روش دیگری هم، برای آزمایش درستی تقسیم، وجود دارد که آن را «روش کنار زدن ۹» یا «روش استفاده از مضرب‌های ۹» می‌نامند. این روش بسیار ساده است و کار را به‌سرعت به‌پایان می‌رساند، ولی به‌آن اطمینان کامل نمی‌توان داشت و باوجودی که درمورد پرسش «آیا عمل تقسیم درست انجام شده‌است یانه؟»، پاسخ مثبت بدهد، بازهم ممکن است عمل تقسیم درست انجام نشده‌باشد.

برای آشنا شدن با این روش، مثالی می‌آوریم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۴۵۹۱ & ۲۸ \\ \hline ۷ & ۸۷۸ \end{array}$$

در این‌جا با چهار عدد سروکار داریم: ۲۴۵۹۱ (بخشی)، ۲۸ (بخشیاب)، ۸۷۸ (خارج‌قسمت) و ۷ (باقی‌مانده).

در هریک از این چهار عدد، مجموع رقم‌ها را محاسبه می‌کنیم و هرچند مضرب ۹ درآن وجود دارد، بیرون می‌رویم. برای بخشی:

$$۲ + ۴ + ۵ + ۹ + ۱ = ۲۱; ۲۱ - ۱۸ = ۳$$

برای بخشیاب

$$۲ + ۸ = ۱۰; ۱۰ - ۹ = ۱$$

برای خارج‌قسمت

$$۸ + ۷ + ۸ = ۲۳; \quad ۲۳ - ۱۸ = ۵$$

و برای باقی‌ماندهٔ تقسیم: ۷

اکنون حاصل‌ضرب خارج‌قسمت در بخشیاب را با باقی‌مانده جمع می‌کنیم و دوباره مضرب‌های ۹ را از آن بیرون می‌رویم:

$$۱ \times ۵ + ۷ = ۱۲; \quad ۱۲ - ۹ = ۳$$

این، همان عددی است که برای بخشی (بعد از بیرون کردن مضرب‌های ۹) به‌دست آورده‌بودیم.

ولی توجه کنید، اگر به‌جای باقی‌مانده، یا خارج‌قسمت و یا هردو، به‌اندازهٔ مضربی از ۹ اشتباه کرده‌بودیم (مثلاً، برای باقی‌مانده ۱۶ یا ۲۵ به‌دست آمده بود)، با این روش، اشتباه عمل تقسیم روشن نمی‌شد.

باوجود این، چون کمتر احتمال دارد که درست به‌اندازهٔ مضربی از ۹، در خارج‌قسمت یا باقی‌مانده اشتباه کنیم، استفاده از این روش می‌تواند سودمند باشد.

۶۵. یا جملهٔ اول تفریق (مفروق) را به‌اندازهٔ ۱۶ واحد کم می‌کنیم و یا به جملهٔ دوم تفریق (مفروق‌منه) ۱۶ واحد اضافه می‌کنیم.

۶۶. *پاسخ.* ۱) حاصل‌ضرب ۳ برابر می‌شود؛ ۲) به حاصل‌ضرب به‌اندازهٔ ۳ برابر جملهٔ دیگر اضافه می‌شود؛ ۳) حاصل‌ضرب نصف می‌شود؛ ۴) از حاصل‌ضرب، به‌اندازهٔ دوبرابر جملهٔ دیگر کم می‌شود.

کوشش کنید، برای هریک از این چهار حالت، دلیل بیاورید.

۶۷. ۱) این تقسیم را درنظر می‌گیریم:

$$a = b \cdot q + r$$

که درآن، a بخشی، b بخشیاب، q خارج‌قسمت و r باقی‌ماندهٔ تقسیم است. اگر دوطرف برابری را بر ۲ تقسیم کنیم، چنین می‌شود:

$$\frac{a}{۲} = b \cdot \frac{q}{۲} + \frac{r}{۲}$$

(توجه کنید، برای نصف کردن bq، تنها q را نصف کردیم، مسالهٔ ۶۶ را ببینید). بنابراین، اگر بخشی را نصف کنیم، هم خارج‌قسمت و هم باقی‌مانده نصف می‌شوند.

۲) *پاسخ.* اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بزرگتر از ۲ یا برابر ۲ باشد، ۲ واحد از باقی‌مانده کم می‌شود و خارج‌قسمت تغییر نمی‌کند؛ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم از ۲ کوچکتر (یعنی مساوی ۱ یا ۰) باشد، یک واحد از خارج‌قسمت کم می‌شود، باقی‌مانده یا تغییر نمی‌کند ویا برابر عددی می‌شود که ۲ واحد از بخشیاب کمتر است.

برای هریک از این حالت‌ها، مثال پیدا کنید.

۶۸. *راهنمائی.* وقتی مقسوم سه‌برابر شود، خارج‌قسمت و باقی‌مانده هم سه‌برابر مشوند، اما ممکن است با سه‌برابر شدن باقی‌مانده، عددی به‌دست آید که از مقسوم‌علیه (بخشیاب) بزرگتر باشد. حالت‌ها را جدا ازهم مورد بحث قرار دهید.

برای حالتی که سه واحد به بخشی اضافه می‌کنیم، باید دوحالت درنظر بگیرید: اول حالتی که بخشیاب از ۳ بزرگتر باشد؛ دوم حالتی که بخشیاب برابر ۲ یا ۳ باشد.

۶۹. وقتی عددی را بر ۵ تقسیم کنیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم، یکی از این چهار عدد است:

$$۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

چون حاصل‌ضرب ۲۰۴ (خارج‌قسمت) در ۵ (بخشیاب) برابر است با ۱۰۲۰، بنابراین، عدد موردنظر، یکی از ۵ عدد زیر است:

$$۱۰۲۰, ۱۰۲۱, ۱۰۲۲, ۱۰۲۳, ۱۰۲۴$$

که می‌توان آن‌ها را این‌طور نوشت:

$$۱۰۲۰ + r \text{ و } r \in \mathbf{W} \text{ و } r < ۵$$

۷۰. پاسخ. ۱) ۴۲۶۶؛ ۲) ۳۳۱۴؛ ۳) ۵۶۲؛ ۴) ۸۲؛ ۵) ۲۵۰.

۷۱. سه زیرمجموعهٔ معروف از مجموعهٔ عددهای طبیعی، عبارتند از مجموعهٔ عددهای زوج، مجموعهٔ عددهای فرد و مجموعهٔ عددهای اول:

$$\text{مجموعهٔ عددهای زوج} = \{x|x = ۲, k \in \mathrm{N}\} =$$
$$= \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, \ldots\}$$

$$\text{مجموعهٔ عددهای فرد} = \{x|x = ۲k - ۱, k \in \mathrm{N}\} =$$
$$= \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, \ldots\}$$

$$\text{مجموعهٔ عددهای اول} = \{p| \text{است } p \text{ تنها بر ۱ و خودش بخش‌پذیر}\} =$$
$$= \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \ldots\}$$

به‌جز این‌ها؛ می‌توان از مجموعهٔ مضرب‌های ۳ یا مضرب‌های هر عدد دیگری نام برد:

$$\text{مجموعهٔ مضرب‌های ۳} = \{x|x = ۳k, k \in \mathrm{N}\} =$$
$$= \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, \ldots\}$$

$$\text{مجموعهٔ مضرب‌های ۱۳} = \{x|x = ۱۳k, k \in \mathrm{N}\} =$$
$$= \{۱۳, ۲۶, ۳۹, ۵۲, ۶۵, ۷۸, \ldots\}$$

ویا مجموعهٔ مکعب‌های عددهای طبیعی:

$$\text{مجموعهٔ مکعب‌های عددهای طبیعی} = \{x|x = k^۳, k \in \mathrm{N}\} =$$
$$= \{۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ۱۲۵, ۲۱۶, \ldots\}$$

* **یادداشت.** همان‌طور که می‌بینید، مجموعهٔ عددهای طبیعی، دارای بی‌نهایت زیرمجموعهٔ بی‌پایان است. مثلاً مجموعه‌های زیر هم، زیرمجموعه‌هایی

از مجموعهٔ عددهای طبیعی‌اند:

$$\{۱ \times ۲, ۲ \times ۳, ۳ \times ۴, ۴ \times ۵, ۵ \times ۶, ۶ \times ۷, \ldots\} =$$
$$= \{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۴۲, ۵۶, ۷۲, \ldots\};$$
$$\{۱^۲ + ۱, ۲^۲ + ۱, ۳^۲ + ۱, ۴^۲ + ۱, ۵^۲ + ۱, ۶^۲ + ۱, \ldots\} =$$
$$= \{۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, ۳۷, ۵۰, ۶۵, ۸۲, \ldots\}$$

ولی دربین زیرمجموعه‌های بی‌پایان مجموعهٔ عددهای طبیعی، برخی بسیار مشهورند و کاربردهایی پیدا کرده‌اند. در این‌جا، به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

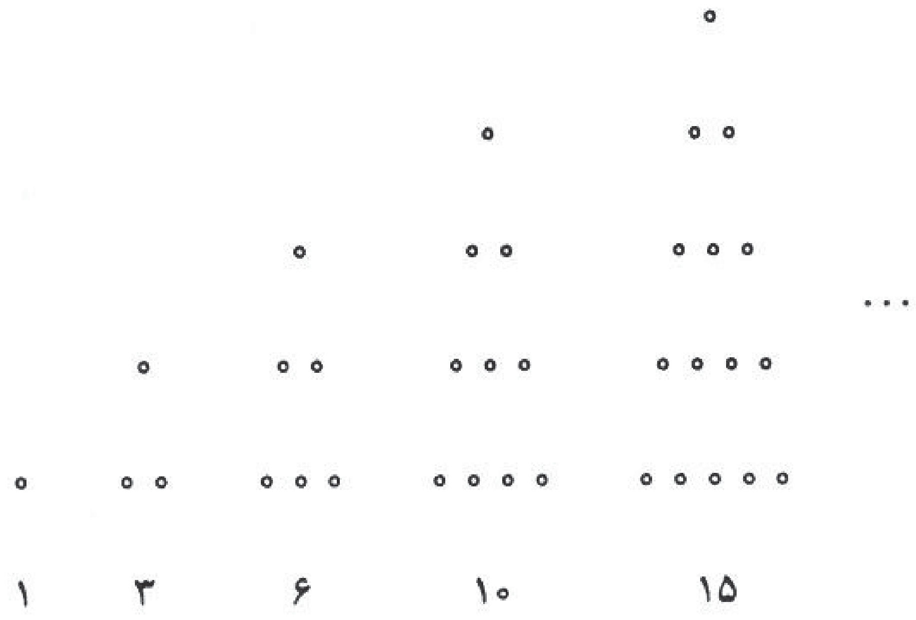
دنبالهٔ فیبوناچی. لئوناروی پیزایی (یعنی اهل پیزای ایتالیا (۱۱۷۰ـ۱۲۵۰ میلادی) معروف به فیبوناچی (یعنی پسر بوناچی) که ضمن مسافرت‌های فراوان خود، با نوشته‌های ریاضی ملت‌های خاور و به‌ویژه ایرانی آشنا شده‌بود (او به‌ویژه زیر تأثیر نوشته‌های ریاضی کرجی ریاضی‌دان ایرانی و به‌خصوص کتاب جبر او به‌نام فخری بود)، در مساله‌ای که دربارهٔ زادوولد خرگوش‌ها مطرح می‌کند، به دنبالهٔ عددهای زیر می‌رسد:

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, \ldots$$

در این دنباله، از جمله سوم به‌بعد، هر جمله برابر است با مجموع دوجملهٔ پیش‌ازخود. دنبالهٔ عددهای فیبوناچی، ویژگی‌های بسیار جالبی دارد که امیدواریم در جلدهای بعدی، به‌موقع خود، دربارهٔ آن‌ها صحبت کنیم. دنبالهٔ عددهای فیبوناچی، زیرمجموعهٔ بی‌پایانی از مجموعهٔ عددهای طبیعی است؛ و چون بنابه تعریف *کانتور*، در یک مجموعه؛ عضوهای تکراری، تنها یکبار نوشته می‌شوند، می‌توان مجموعهٔ عددهای فیبوناچی را این‌طور نوشت:

$$\text{مجموعهٔ عددهای فیبوناچی} = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, \ldots\}$$

عددهای چندضلعی. تعداد زیادی سکه‌های مساوی بردارید و تلاش کنید، با کنار هم گذاشتن آن‌ها در روی میز، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع درست کنید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶: عددهای منفی

به‌این‌ترتیب، دنباله‌ای از عددها به‌دست می‌آید:

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۶, ۴۵, ...

درواقع، اگر جملهٔ اول این دنباله را، برابر ۱ بگیریم، باید عددهای طبیعی را (با آغاز از ۲) و به‌ترتیب به هر جمله اضافه کنیم تا جمله بعد به‌دست آید:

۱+۲ = ۳ (جمله دوم) ;   ۳+۳ = ۶ (جملهٔ سوم) ;

۶+۴ = ۱۰;   ۱۰ +۵ = ۱۵;   ۱۵+۶ = ۲۱; ...

عددهای طبیعی را، با حروف سیاه آورده‌ایم تا روش کار روشن‌تر شود. این عددها را، **عددهای مثلثی** گویند:

$$\text{(مجموعهٔ عددهای مثلثی)} = \{۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۶, ۴۵, ۵۵, ۶۶, ۷۸, \ldots\}$$

* اگر علاقه‌مند باشید، می‌توان راهی را پیدا کرد که بتوانیم، به‌طور مستقیم، هر جمله از دنبالهٔ عددهای مثلثی را پیدا کنیم.

درواقع، برای پیدا کردن جملهٔ دوم، ۲ واحد به جملهٔ قبل اضافه کردیم؛ برای پیدا کردن جملهٔ سوم، ۳ واحد به جملهٔ قبل اضافه کردیم، ...، برای پیدا کردن جملهٔ دهم، ۱۰ واحد به جملهٔ قبل اضافه کردیم و غیره.

اگر جملهٔ عمومی این دنباله، یعنی جملهٔ nام آن را U_n بنامیم، به‌ترتیب، می‌توان نوشت:

$$U_n = U_{n-۱} + n$$

$$U_{n-۱} = U_{n-۲} + (n - ۱)$$

$$\ldots$$

$$U_۳ = u_۲ + ۳$$

$$U_۲ = U_۱ + ۲$$

$$U_۱ = ۱$$

این برابری‌ها را باهم جمع می‌کنیم، بعد از حذف جمله‌های مساوی در دوطرف برابری، به‌دست می‌آید:

$$U_n = n + (n - ۱) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱$$

این برابری را دوبار زیرهم می‌نویسیم، یکبار از n تا ۱ و یکبار از ۱ تا n:

$$\begin{cases} U_n = n + (n-۱) + (n-۲) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱ \\ U_n = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n-۲) + (n-۱) + n \end{cases}$$

و باهم جمع می‌کنیم: مجموع هر دو عددی که در سمت راست برابری‌ها، زیرهم قرار دارند، برابر $n + ۱$ می‌شود و چون در سمت راست هر برابری، n عدد وجود دارد، بنابراین به‌دست می‌ید:

$$۲U_n = n(n+۱) \Rightarrow U_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثلاً، جملهٔ دهم دنبالهٔ عددهای مثلثی

$$U_{۱۰} = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

و جملهٔ هزارم آن

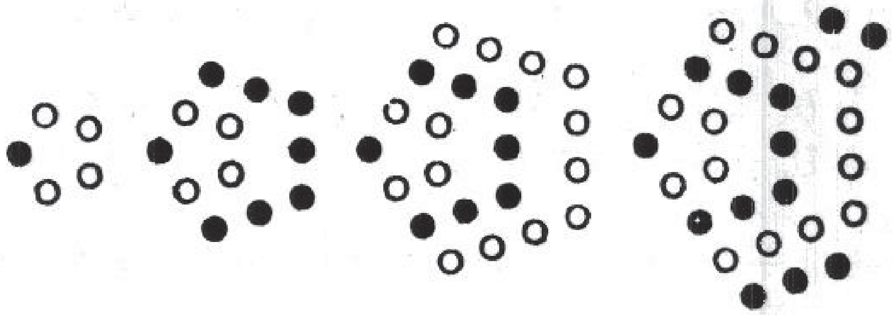
$$U_{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰ \times ۱۰۰۱}{۲} = ۵۰۰۵۰۰$$

می‌شود.

شبیه عددهای مثلثی، می‌توان **عددهای مربعی** را به‌دست آورد. آزمایش با سکه‌های برابر، دشوار نیست و، درواقع، عددهای مربعی، همان مربع یا مجذور عددهای طبیعی‌اند، که زیرمجموعه‌ای بی‌پایان از مجموعهٔ عددهای طبیعی است:

$$\text{مجموعهٔ عددهای مربعی} = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, \ldots\}$$

* شبیه عددهای مثلثی و عددهای مربعی، می‌توان به عددهای به‌صورت پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و غیره دست یافت که، در این‌جا، از تفصیل دربارهٔ



شکل ۳۷: عددهای پنج‌ضلعی

آن‌ها می‌گذریم. در شکل ۳۷ ، پنج عدد نخستین به‌صورت پنج ضلعی داده شده‌است.

= مجموعهٔ عددهای پنج‌ضلعی
$= \{۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ۷۰, ۹۲, ۱۱۷, \ldots\}$

پیدا کردن عددهای چندضلعی، یک سرگرمی جالب ریاضی است، به‌ویژه اگر کوشش شود، رابطهٔ بین این عددها، و مثلاً رابطهٔ بین عددهای پنج‌ضلعی و عددهای مثلثی کشف شود.

۷۲. *پاسخ.* ۱) ۱۸؛ ۲) ۰؛ ۳) ۱۶۴۸۲۰.

۷۳. برای ضرب یک عدد در ۵، یک صفر در سمت راست عدد بگذارید و بعد آن را نصف کنید (چرا؟). ۲) برای ضرب عددی در ۲۵، دو صفر در سمت راست عدد بگذارید و بعد $\frac{۱}{۴}$ آن را به‌دست آورید. ۳) برای ضرب عددی در ۹، خود عدد را از ده برابر آن کم کنید. ۴) برای ضرب در ۹۹، خود عدد را از ۱۰۰ برابر آن کم کنید. ۵) برای ضرب در ۱۱ دو روش وجود دارد: می‌توانید ده برابر عدد را با خودش جمع کنید، یا رقم سمت راست عدد را به‌عنوان رقم سمت راست حاصل‌ضرب بنویسید و برای رقم‌های بعدی حاصل‌ضرب، پشت سرهم، هردو رقم مجاور عدد اصلی را

باهم جمع کنید: مثلاً برای ضرب ۴۷۹۶۲ در ۱۱:

رقم یکان حاصل‌ضرب = ۲

رقم دهگان ۸ = ۶ + ۲

رقم صدگان ۵ ;۱۵ = ۹ + ۶

هزارگان ۷ ;۱۷ = ۷+ ۹ + ۱

ده‌هزارگان ۲ ;۱۲ = ۴+ ۷ + ۱

صدهزارگان ۵ = ۴ + ۱

$$۴۷۹۶۲ \times ۱۱ = ۵۲۷۵۸۲$$

۶) برای ضرب عددی در ۱۰۱، دو صفر سمت راست آن بگذارید (یعنی آن را صد برابر کنید) و بعد، با خودش جمع کنید. ۷) برای تقسیم بر ۵، دوبرابر آن را بر ۱۰ تقسیم کنید. ۸) برای تقسیم بر ۲۵، چهار برابر عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنید. ۹) برای تقسیم بر ۵۰، دو برابر عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنید مثلاً برای تقسیم عدد ۴۳۷۵ بر ۲۵:

$$۴۳۷۵ \times ۴ = ۱۷۵۰۰;$$

$$۱۷۵۰۰ : ۱۰۰ = ۱۷۵;$$

$$۴۳۷۵ : ۲۵ = ۱۷۵$$

۷۴. چنین حاصل‌ضربی همیشه به ۲۵ ختم می‌شود و باید در سمت چپ ۲۵، حاصل‌ضرب دهگان عدد در عدد بلافاصله بعد از آن را نوشت. مثلاً برای ۶۵ × ۶۵، حاصل‌ضرب ۶ در عدد بلافاصله بعد از آن، یعنی ۷، برابر ۴۲ می‌شود، پس

$$۶۵ \times ۶۵ = ۴۲۲۵$$

ویا

$$۹۵ \times ۹۵ = ۹۰۲۵$$

$$۱۱۵ \times ۱۱۵ = ۱۳۲۲۵$$

(۱۳۲ برابر است با حاصل‌ضرب ۱۲ × ۱۱).

***یادداشت.** اگر عدد مفروض را $\overline{a۵}$ فرض کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\overline{a۵} = ۱۰a + ۵$$

$$(۱۰a + ۵)(۱۰a + ۵) =$$

$$= ۱۰۰a^۲ + ۱۰۰a + ۲۵ = ۱۰۰a(a + ۱) + ۲۵$$

و این نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب به ۲۵ ختم می‌شود و در سمت چپ آن باید $a(a + ۱)$ را نوشت.

۱۷۵. *برای بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰.* اگر عدد را $\overline{ab}$ فرض کنیم (b، یک رقم است، ولی a را می‌توان یک عدد درنظر گرفت؛ مثلاً در ۳۲۵، داریم: $b = ۵$ و $a = ۳۲$). این عدد را می‌توان به‌صورت $۱۰a + b$ نوشت. $۱۰a$ همیشه بر ۲، بر ۵ و بر ۱۰ بخش‌پذیر است، بنابراین، برای این‌که عدد بر ۲، ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید b مضربی از این عدد باشد:

b وقتی مضرب ۲ است که زوج باشد؛

b وقتی مضرب ۵ است که برابر ۵ یا صفر باشد؛

b وقتی مضرب ۱۰ است که برابر صفر باشد.

۲) *برای بخش‌پذیری بر ۴ و ۲۵.* عدد را $\overline{abc}$ فرض کنید و به‌صورت $۱۰۰a + \overline{bc}$ بنویسید.

۳) *برای بخش‌پذیری بر ۸ و ۱۲۵.* عدد را به‌صورت $\overline{abcd}$ درنظر بگیرید، که درواقع برابر است با $۱۰۰۰a + \overline{bcd}$.

۴) *برای بخش‌پذیری بر ۳ و ۹*. اگر عدد را مثلاً چهاررقمی و به‌صورت $\overline{abcd}$ درنظر بگیریم، داریم:

$$\overline{abcd} = ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d$$

باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عددهای ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ بر ۳ یا بر ۹ برابر واحد است. پس باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم

$$a + b + c + d$$

بر ۳ یا ۹. بنابراین، وقتی عدد مفروض بر ۳ یا بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ یا بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

۵) *برای بخش‌پذیری بر ۶، ۱۲، ۱۴ و ۱۵*. پیش از این گفتیم، اگر دو عدد نسبت به هم اول باشد و عدد سوم بر هریک از این دوعدد بخش‌پذیر باشد، بر حاصل‌ضرب آن‌ها بخش‌پذیر است.

۲ و ۳ نسبت به هم اول‌اند، پس عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد؛ همچنین عددی بر ۱۲ یا ۱۴ یا ۱۵ بخش‌پذیر است که بر ۳ و ۴ یا ۲ و ۷ یا ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

۶) *برای بخش‌پذیری بر ۱۱*. عدد را شش‌رقمی فرض می‌کنیم:

$$\overline{abcdef} = ۱۰۰۰۰۰a + ۱۰۰۰۰b + ۱۰۰۰c + ۱۰۰d +$$
$$+ ۱۰e + f$$

با اندکی توجه معلوم می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم هریک از عددهای ۱۰۰ و ۱۰۰۰۰ بر ۱۱ برابر واحد است:

$$۱۰۰ = ۹ \times ۱۱ + ۱; \quad ۱۰۰۰۰ = ۹۰۹ \times ۱۱ + ۱$$

باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عددهای ۱۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ بر ۱۱ برابر است با ۱۰، ولی اگر ۱۰ را برابر «۱ − ۱۱» بنویسیم، می‌توانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم این عددها را بر ۱۱ برابر ۱− فرض کنیم

$$۱۰ = ۱ \times ۱۱ - ۱; \quad ۱۰۰۰ = ۹۱ \times ۱۱ - ۱;$$

$$۱۰۰۰۰۰ = ۹۰۹۱ \times ۱۱ - ۱$$

بنابراین، اگر در بازشدهٔ عدد، مضرب‌های ۱۱ را کنار بگذاریم، به عدد

$$(f + d + b) - (e + c + a) \qquad (۱)$$

می‌رسیم، یعنی وقتی عدد مفروض بر ۱۱ بخش‌پذیر است که عدد (۱) بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۷) *برای بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳. راهنمائی.* عددهای

$$۱۰^{۳}, ۱۰^{۹}, ۱۰^{۱۵}, \ldots$$

در تقسیم بر ۷ یا ۱۳ به باقی‌ماندهٔ ۱- و عددهای

$$۱۰^{۶}, ۱۰^{۱۲}, ۱۰^{۱۸}, \ldots$$

در تقسیم بر ۷ یا ۱۳ به باقی‌ماندهٔ ۱+ می‌رسند.

.۷۶

مجموعهٔ مضرب‌های ۶ $= \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ۳۶, \ldots\};$

مجموعهٔ مضرب‌های ۹ $= \{۹, ۱۸, ۲۷, ۳۶, ۴۵, ۵۴, \ldots\};$

مجموعهٔ مضرب‌های ۱۵ $= \{۱۵, ۳۰, ۴۵, ۶۰, ۷۵, ۹۰, \ldots\};$

مجموعهٔ مضرب‌های مشترک ۶ و ۹ و ۱۵ $= \{۹۰, ۱۸۰, ۲۷۰, ۳۶۰, \ldots\}$

کوچکترین مضرب مشترک ۶ و ۹ و ۱۵ $= ۹۰$

.۷۷

مجموعهٔ بخشیاب‌های ۳۶ = {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶};

مجموعهٔ بخشیاب‌های ۶۰ = {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۳۰, ۶۰};

مجموعهٔ بخشیاب‌های ۸۴ = {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۱۲, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ۴۲, ۸۴};

مجموعهٔ بخشیاب‌های مشترک ۳۶ و ۶۰ و ۸۴ = {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲}

بزرگترین بخشیاب مشترک ۳۶ و ۶۰ و ۸۴ = ۱۲

۷۸. مضرب‌های مشترک دو عدد، مجموعه‌ای بی‌پایان را تشکیل می‌دهند و، بنابراین، بزرگترین مضرب مشترک برای دو عدد وجود ندارد.

هر عدد طبیعی بر ۱ بخش‌پذیر است و، بنابراین، عدد ۱، کوچکترین بخشیاب مشترک هر دو عدد دلخواه است.

۷۹. ساده‌ترین عدد شش‌رقمی با رقم‌های مساوی چنین است:

۱۱۱۱۱۱

این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت تقسیم برابر ۱۵۸۷۳ می‌شود:

$$۱۵۸۷۳ \times ۷ = ۱۱۱۱۱۱$$

و روشن است، اگر دوبرابر یا سه‌برابر عدد ۱۵۸۷۳ را در ۷ ضرب کنیم، عددی شش‌رقمی با رقم‌های ۲ یا ۳ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب ۹ عدد وجود دارد که از ضرب هریک از آن‌ها در ۷، عددی شش‌رقمی با رقم‌های برابر به‌دست می‌آید:

$$۱۵۸۷۳ \times ۷ = ۱۱۱۱۱۱;$$

$$۳۱۷۴۶ \times ۷ = ۲۲۲۲۲۲;$$

$$۴۷۶۱۹ \times ۷ = ۳۳۳۳۳۳;$$

$$۶۳۴۹۲ \times ۷ = ۴۴۴۴۴۴;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۷ = ۹۹۹۹۹۹$$

۸۰. ۱) در عدد $\overline{abc}$ فرض می‌کنیم $a > c$، دراین‌صورت $\overline{cba}$ از $\overline{abc}$ کوچکتر است و داریم.

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (۱۰۰a + ۱۰b + c) - (۱۰۰c +$$
$$+ ۱۰b + a) = ۹۹a - ۹۹c = ۹۹(a - c)$$

و روشن است که ۹۹، بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

یادداشت. وقتی رقم‌های یک عدد را طوری جابه‌جا کنیم که رقم‌های عدد اول (از چپ به راست) با رقم‌های عدد دوم (از سمت راست به چپ) برابر باشد، دو عدد را مقلوب یکدیگر گویند: ۱۲ و ۲۱ یا ۳۷۵ و ۵۷۳ یا ۲۴۳۸ و ۸۳۴۲، مقلوب یکدیگرند.

۲) این عدد شش‌رقمی را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\overline{abcabc} = ۱۰۰۰\overline{abc} + \overline{abc} = ۱۰۰۱\overline{abc},$$

و $۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$.

۸۱. اگر عدد دورقمی را $\overline{xy}$ فرض کنیم ($۹ \geq x > ۰$ و $۹ \geq y \geq ۰$)، باید داشته‌باشیم:

$$\overline{xy} = (x + ۲)(y + ۲)$$

یا

$$۱۰x + y = xy + ۲x + ۲y + ۴$$

این برابری، به‌ترتیب، به‌این صورت درمی‌آید:

$$xy + y = ۸x - ۴; \quad y(x + ۱) = ۸x - ۴;$$
$$y = \frac{۸x - ۴}{x + ۱} = \frac{۸(x + ۱) - ۱۲}{x + ۱} = ۸ - \frac{۱۲}{x + ۱}$$

چون باید برای y عدد درستی (از صفر تا ۹) به‌دست آید، پس قبل از همه، باید ۱۲ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد. ۱۲ بر این عددها بخش‌پذیر است:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲$$

ولی $x + ۱$ برابر ۱ یا ۱۲ نمی‌تواند باشد، زیرا از $x + ۱ = ۱$، به‌دست می‌آید $x = ۰$ که قابل‌قبول نیست و از $x + ۱ = ۱۲$، به‌دست می‌آید $x = ۱۱$ که بازهم قابل‌قبول نیست (x، یک رقم از ۱۰ کوچکتر است). در حالت‌های دیگر به‌سادگی x و y و درنتیجه، عدد دورقمی $\overline{xy}$ پیدا می‌شود:

$$x + ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \text{ و } y = ۲; \overline{xy} = ۱۲;$$
$$x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ \text{ و } y = ۴; \overline{xy} = ۲۴;$$
$$x + ۱ = ۴ \Rightarrow x = ۳ \text{ و } y = ۵; \overline{xy} = ۳۵;$$
$$x + ۱ = ۶ \Rightarrow x = ۵ \text{ و } y = ۶; \overline{xy} = ۵۶$$

مساله چهار جواب دارد: ۱۲، ۲۴، ۳۵ و ۵۶.

۸۲. باید داشته‌باشیم:

$$۱۰a + b = (a + n)(b + n)$$

ثابت می‌کنیم، عدد n نمی‌تواند از ۶ بزرگتر باشد. اگر $n \geq ۷$، آن‌وقت، چون $a \neq ۰$، باید داشته‌باشیم:

$$a + n \geq ۸ \text{ و } b + n \geq ۷$$

پس $(a+n)(b+n) \geq ۵۶$، یعنی عدد دورقمی $\overline{ab}$ باید بزرگتر یا برابر ۵۶ باشد و، بنابراین، $a \geq ۵$، ولی دراین‌صورت

$$a+n \geq ۱۲ \text{ و } b+n > ۷$$

در نتیجه $\overline{ab} \geq ۱۲ \times ۷ = ۸۴$ و $a \geq ۸$، دراین‌صورت

$$a+n \geq ۱۵ \text{ و } b+n \geq ۷ \text{ و } \overline{ab} \geq ۱۰۵$$

که بی‌معنی است، زیرا $\overline{ab}$ عددی دورقمی است و نمی‌تواند از ۹۹ بزرگتر باشد.

به‌این ترتیب، بزرگترین عدد برای n، ممکن است ۶ باشد. به‌ازای $n = ۶$، باید داشته‌باشیم:

$$(a+۶)(b+۶) = ۱۰a + b$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$ab + ۵b + ۳۶ = ۴a$$

ولی حداکثر مقدار a، برابر است با ۹، پس سمت راست تساوی، حداکثر برابر است با ۳۶، که دراین صورت به‌دست می‌آید $b = ۰$.

پاسخ: بزرگترین مقدار n، عبارت است از $n = ۶$ که برای عدد دورقمی ۹۰ صدق می‌کند:

$$۹۰ = (۹+۶)(۰+۶)$$

۸۳. عدد مجهول را x می‌نامیم. دراین‌صورت، برای این‌که عدد $۸x$، عددی نه‌رقمی باشد، باید از سمت چپ با عدد دورقمی ۱۲ آغاز شود (چرا؟)، یعنی

$$x = ۱۲\ldots$$

ولی، برای این‌که در $۸x$، رقم‌ها تکرار نشوند، باید داشته‌باشیم:

$$x = ۱۲۳\ldots$$

زیرا اگر $x = ۱۲۴\ldots$، آن‌وقت $۸x = ۹۹\ldots$ (اگر $x = ۱۲۵\ldots$ یا بزرگتر از آن باشد، آن‌وقت $۸x$، عددی ۱۰رقمی می‌شود.

با استدلال‌هایی مشابه:

اگر $x = ۱۲۳۵\ldots$، آن‌وقت $۸x = ۹۸۸\ldots$ (یعنی دارای رقم تکراری) و، بنابراین $x = ۱۲۳۴\ldots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۶\ldots$، آن‌وقت $۸x = ۹۸۷۶۸\ldots$؛ پس $x = ۱۲۳۴۵\ldots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۷\ldots$، آن‌وقت $۸x = ۹۸۷۶۵۶\ldots$،بنابراین $x = ۱۲۳۴۵۶$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۶۸\ldots$، آن‌وقت $۸x = ۹۸۷۶۵۴۴\ldots$، $x = ۱۲۳۴۵۶۷$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۶۷۹۸$، به‌دست می‌آید:

$$۸x = ۹۸۷۶۵۴۳۸۴$$

پس $x = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹$، این عدد، با شرط‌های مساله سازگار است، زیرا

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۱۲$$

یادداشت. جالب این است که، اگر عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را در ۲ یا ۴ هم ضرب کنیم، در حاصل‌ضرب، بازهم همین رقم‌ها (و البته با ردیف‌های دیگری) به‌دست می‌آید:

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۲ = ۲۴۶۹۱۳۵۷۸$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۴ = ۴۹۳۸۲۷۱۵۶$$

۸۴. فرض می‌کنیم، مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو زیرمجموعهٔ A و B تقسیم کرده‌باشیم، به‌نحوی که

$$A \cap B = \phi \text{ و } A \cup B = \mathbf{N}$$

و فرض می‌کنیم، مجموعهٔ A دارای ویژگی موردنظر مساله نباشد، یعنی میانگین حسابی هیچ دو عضوی از آن، متعلق به مجموعهٔ A نباشد.

سه عدد طبیعی ۶ و ۸ و ۱۰ را درنظر می‌گیریم. چند حالتِ ممکن وجود دارد:

۱) $۶ \in A$ و $۸ \in A$؛ دراین‌صورت $۱۰ \in B$، زیرا اگر ۱۰ عضو مجموعهٔ A باشد، آن‌وقت میانگین حسابی دو عدد ۱۰ و ۶، یعنی ۸ عضو A می‌شود که مخالف فرض است. همچنین، در این حالت $۴ \in B$ (۶، میانگین حسابی دو عدد ۴ و ۸ است) و $۷ \in B$ (میانگین حسابی ۶ و ۸). ولی برای سه عدد ۴ و ۷ و ۱۰ (که هرسه عضو مجموعهٔ B هستند)، داریم:

$$۷ = \frac{۴ + ۱۰}{۲}$$

۲) $۶ \in A$ و $۱۰ \in A$؛ با استدلالی شبیه حالت قبل باید داشته‌باشیم: $۲ \in B$، $۸ \in B$، $۱۴ \in B$، ولی

$$۸ = \frac{۲ + ۱۴}{۲}$$

۳) $۸ \in A$، $۱۰ \in A$؛ دراین صورت $۶ \in B$، $۹ \in B$، $۱۲ \in B$ و

$$۹ = \frac{۶ + ۱۲}{۲}$$

۴) $A \not\ni ۶$، $A \not\ni ۸$ و $A \not\ni ۱۰$، دراین‌صورت این سه عدد عضو B هستند و داریم:

$$۸ = \frac{۶ + ۱۰}{۲}$$

حالت دیگری وجود دارد، زیرا اگر از عددهای ۶ و ۸ و ۱۰، تنها یکی عضو A و دوتای دیگر عضو B باشند، آن‌وقت به یکی از سه‌حالت اول (با جابه‌جا شدن نقش زیرمجموعه‌های A و B) منجر می‌شود.

۸۵. نخستین شماره‌ها، متعلق به عددهایی است که با ۱ آغاز شده‌اند. دراین عددها، رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، به ردیفی دلخواه، بعد از رقم ۱ آمده‌اند، به نحوی که رقم دوم (از سمت چپ عــدد) را، ۵ نوع می‌توان انتخاب کرد (یکی از رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶). وقتی رقم دوم معلوم باشد، رقم سوم را به ۴ طریق و، بعد، رقم چهارم را به ۳ طریق، رقم پنجم را به دو طریق می‌توان درنظر گرفت که، دراین صورت، رقم ششم، به خودی خود معلوم می‌شود. به‌این ترتیب، تعداد عددهای شش‌رقمی که با ۱ آغاز می‌شوند، برابر است با

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$$

چون رقم اول (از سمت چپ) می‌تواند ۲ یا ۳ باشد (عدد A، با ۴ آغاز شده‌است)، پس قبل از عدد A، به‌تعداد ۱۲۰×۳، یعنی ۳۶۰ عدد وجود دارد که با ۱ یا ۲ یا ۳ آغاز شده‌اند.

به‌همین ترتیب، عدد A، بعد از عددهایی قرار دارد که با ۴۱ یا ۴۲ آغاز شده‌اند تعداد این‌گونه عددها (شبیه محاسبه قبل) برابر است با

$$۲(۴ \times ۳ \times ۲) = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

تعداد عددهایی که با ۴۳۱ و ۴۳۲ آغاز شده‌اند (عددی با آغاز ۴۳۳ یا ۴۳۴ نداریم، چون بنابر فرض، در عددها، رقم تکراری وجود ندارد)، برابر است

با

$$۲(۳ \times ۲) = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

و سرانجام، دو عدد وجود دارد که با ۴۳۵۱ آغاز شده‌اند.

این‌ها، کل عددهایی هستند که قبل از عدد A قرار گرفته‌اند و تعداد آن‌ها برابر است با

$$۳۶۰ + ۴۸ + ۱۲ + ۲ = ۴۲۲$$

بنابراین، عدد A، در ردیف چهارصدوبیست‌وسوم است.

۸۶. یک عدد، وقتی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که، اگر مجموع رقم‌های ردیف زوج را $S_۱$ و مجموع رقم‌های ردیف فرد را $S_۲$ بنامیم (ردیف رقم‌ها را از راست به چپ درنظر می‌گیریم)، تفاوت $S_۱ - S_۲$ یا $S_۲ - S_۱$ برابر مضربی از ۱۱ یا برابر صفر باشد.

بیشترین مقدار $S_۱$، می‌تواند برابر

$$۴ + ۵ + ۶ = ۱۵$$

و درنتیجه $S_۲ = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$ باشد که، دراین‌صورت $S_۱ - S_۲$ برابر ۹ می‌شود. یعنی $S_۱ - S_۲$ یا $S_۲ - S_۱$ نمی‌تواند مضربی از ۱۱ باشد.

ازطرف دیگر داریم:

$$S_۱ + S_۲ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۱$$

که عددی است فرد و نمی‌توان آن را به دو بخش برابر تقسیم کرد تا تفاضل $S_۱ - S_۲$ برابر صفر شود.

بنابراین، عدد شش‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۱ که با رقم‌های مختلف از ۱ تا ۶ درست شده‌باشد، وجود ندارد.

۸۷. شرط مساله به این معناست که هیچ‌کدام از n عدد مرکب را (که عدد ۱۳۷۵ به‌صورت مجموع آن‌ها نوشته شده‌است)، نمی‌توان به مجموع دو

عدد مرکب دیگر تبدیل کرد. مجموعهٔ A، از عددهای مرکبی را پیدا می‌کنیم که هیچ عضو آن را نتوان به‌صورت مجموع دو عدد مرکب دیگر نوشت. m را عددی زوج می‌گیریم و آن را این‌طور می‌نویسیم:

$$m = ۲k = ۲(k - ۲) + ۴, \quad (k \in \mathbf{N})$$

اگر $k > ۳$، آن‌وقت m نمی‌تواند عضوی از مجموعهٔ A باشد، زیرا در چنین حالتی خواهیم‌داشت $k - ۱ > ۱$ و، درنتیجه، خود m به مجموع دو عدد مرکب قابل‌تبدیل است:

$$(m = ۲k \text{ و } k > ۳) \Rightarrow m \notin A$$

به‌ازای $k = ۱$، برای m عددی اول (غیرمرکب) به‌دست می‌آید؛ ولی به‌ازای $k = ۲$ و $k = ۳$ به‌دست می‌آید.

$$m = ۴ \in A \text{ و } m = ۶ \in A$$

اکنون m را عددی فرد می‌گیریم:

$$m = ۲k + ۱ = ۲(k - ۴) + ۹, \quad (k \in \mathbf{N})$$

به‌ازای $k > ۴$، عدد m قابل‌تبدیل به مجموع دو عدد مرکب است و

$$(m = ۲k + ۱ \text{ و } k > ۴) \Rightarrow m \notin A$$

به‌ازای $k < ۴$، عدد m غیرمرکب است و به‌ازای $k = ۴$:

$$h = ۴ \Rightarrow m = ۹ \in A$$

بنابراین، مجموعهٔ A تنها سه عضو دارد:

$$A = \{۴, ۶, ۹\}$$

به‌این‌ترتیب هر n جمله‌ای که، مجموع آن‌ها، برابر عدد ۱۳۷۵ شده‌است، از همین سه عدد ۴، ۶ و ۹ تشکیل شده‌است. ولی ۹ یا ۶ نمی‌توانند در این مجموعه تکرار شوند، زیرا اگر در مجموع داشته‌باشیم ۹+۹ یا ۶+۶ آن‌وقت مجموع اولی را می‌توان به‌صورت ۶ + ۶ + ۶ و مجموع دومی را به‌صورت ۴ + ۴ + ۴ نوشت، یعنی درهرحال به تعداد جمله‌های جمع اضافه می‌شود، درحالی‌که، بنابرشرط مساله، جمله‌های جمع، یعنی تعداد عددهای مرکب نمی‌تواند زیادتر شود. درضمن ۹ در این مجموع وجود دارد، زیرا ۱۳۷۵ عدد فرد است و نمی‌توان آن را به مجموع عددهای برابر ۴ تبدیل کرد. به‌جز این، چون

$$۱۳۷۵ - ۹ = ۱۳۶۶$$

و عدد ۱۳۶۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، باید عدد ۶ هم در مجموع وجود داشته‌باشد. درنتیجه

$$۱۳۷۵ = ۹ + ۶ + ۴ \times ۳۴۰ =$$
$$= ۹ + ۶ + \underbrace{۴ + ۴ + \ldots + ۴}_{\text{۳۴۰ بار}}$$

پاسخ. $n = ۳۴۲$.

۸۸. عدد مجهول را x می‌نامیم و $y = ۴x$ را عددی می‌گیریم که با انتقال رقم ۴، از سمت راست x به سمت چپ آن به‌دست آمده‌است.

نخستین رقم سمت چپ در y برابر ۴ است، بنابراین نخستین رقم سمت چپ x برابر ۱ می‌شود (زیرا x، از تقسیم y بر ۴ به‌دست می‌آید). چون ردیف رقم‌های y، از چپ راست و بعد از رقم ۴، همان رقم‌های x (باز هم از چپ به راست) است، پس عدد y با دو رقم ۴۱ آغاز می‌شود. از تقسیم ۴۱ بر ۴، معلوم می‌شود، رقم دوم x (از چپ به راست) و، بنابراین،

رقم سوم y (از چپ به راست) برابر صفر است و y با رقم‌های ۴۱۰ آغاز می‌شود.

با تقسیم ۴۱۰ و ۴، سومین رقم x و، بنابراین، چهارمین رقم y، برابر ۲، به‌دست می‌آید: عدد y با ۴۱۰۲ آغاز می‌شود به‌همین ترتیب دو رقم بعد y به‌دست می‌آید و ما را به عدد شش‌رقم ۴۱۰۲۵۶ می‌رساند که ۴برابر ۱۰۲۵۶۴ است.

پاسخ. عدد مجهول برابر است با ۱۰۲۵۶۴.

یادداشت. می‌توانستیم، به‌جای استفاده از تقسیم، عدد x را ۴برابر کنیم. رقم سمت راست x، طبق فرض، برابر است با ۴؛ چون ۴برابر ۴ مساوی است با ۱۶، پس رقم سمت راست y برابر است با ۶. همین رقم ۶، رقم دوم x (از سمت راست) می‌شود که با ضرب ۶۴ در ۴، معلوم می‌شود رقم دوم y، یعنی رقم سوم x (از سمت راست) برابر ۵ است و غیره.

۸۹. چون X می‌تواند هر زیرمجموعهٔ دلخواهی از مجموعهٔ C باشد، باید برابری موردنظر مساله، برای $X = C$ هم برقرار باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$C \cap A = C \cup B$$

ولی چون $B \subset C$، پس $C \cup B = C$ و باید داشته‌باشیم:

$$C \cap A = C \Rightarrow A = C$$

از طرف دیگر، برابری موردنظر، باید برای $X = \phi$ هم برقرار باشد:

$$\phi \cap A = \phi \cup B$$

چون اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعهٔ تهی، یک مجموعهٔ تهی است:

$$\phi \cup B = B = \phi$$

پاسخ. $A = C$ و $B = \phi$.

۹۰. عدد دورقمی را $\overline{xy} = ۱۰x + y$ می‌گیریم. با گذاشتن رقم صفر، بین دو رقم آن، به عدد سه‌رقمی $\overline{x۰y} = ۱۰۰x + y$ می‌رسیم. باید این عدد سه‌رقمی بر عدد دورقمی ما بخش‌پذیر باشد. خارج‌قسمت را k می‌نامیم:

$$k = \frac{۱۰۰x + y}{۱۰x + y} = \frac{۱۰(۱۰x + y) - ۹y}{۱۰x + y} = ۱۰ - \frac{۹y}{۱۰x + y}$$

پس حداکثر مقدار k، یعنی خارج قسمت، برابر است با ۱۰ و وقتی به‌دست می‌آید که داشته‌باشیم $y = ۰$ دراین‌حالت، x می‌تواند هر رقم دلخواه از ۱ تا ۹ باشد. مثلاً، اگر عدد دورقمی برابر ۷۰ باشد، با گذاشتن ۰ بین رقم‌های آن، برابر ۷۰۰ می‌شود و درضمن

$$۷۰۰ : ۷۰ = ۱۰$$

برای پیدا کردن کوچکترین مقدار k، باید با آزمایش و استفاده از روش جست‌وجو عمل کنیم. قبل از هرچیز، باید $۹y$ بر $۱۰x + y$ بخش‌پذیر باشد. اگر y را برابر رقم‌های از ۱ تا ۹ بگیریم، برای $۹y$، این عددها به‌دست می‌آید:

$$۹, ۱۸, ۲۷, ۳۶, ۴۵, ۵۴, ۶۳, ۷۲, ۸۱$$

ولی برای $y = ۱$، جوابی به‌دست نمی‌آید، زیرا عدد یک‌رقمی ۹ نمی‌تواند بر عدد دورقمی بخش‌پذیر باشد،۱۸ بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست؛ ۲۷ نه بر ۱۳ بخش‌پذیر است نه بر ۲۳ و ۳۶ بر هیچ‌کدام از عددهای ۱۴، ۲۴ و ۳۴ بخش‌پذیر نیست.

ولی ۴۵ بر ۱۵ بخش‌پذیر است که، دراین‌صورت،

$$k = ۱۰۵ : ۱۵ = ۷$$

البته ۴۵ بر ۲۵ و ۳۵ بخش‌پذیر نیست، ولی بر ۴۵ بخش‌پذیر است. دراین‌حالت

$$k = ۴۰۵ : ۴۵ = ۹ > ۷$$

۵۴ بر هیچ‌کدام از عددهای ۱۷، ۲۷، ۳۷، ۴۷ و ۵۷ بخش‌پذیر نیست.

۷۲ بر ۱۸ بخش‌پذیر و بر ۲۸، ۳۸، ۴۸، ۵۸ و ۶۸ بخش‌ناپذیر است و برای $\overline{xy} = ۱۸$ داریم:

$$k = ۱۰۸ : ۱۸ = ۶ < ۷$$

۸۱ هم بر هیچ‌کدام از عددهای ۱۹، ۲۹، ۳۹، ۴۹، ۵۹، ۶۹ و ۷۹ بخش‌پذیر نیست

پاسخ. بزرگترین مقدار خارج‌قسمت برابر ۱۰ و برای عدد $\overline{x۰}$ است؛ کوچکترین مقدار خارج‌قسمت برابر ۶ و برای عدد دورقمی ۱۸ است.

۹۱. *راه‌حل اول.* سه رقم‌را a و b و c می‌گیریم. فرض را بر این‌می‌گیریم‌که $a > b > c$، بنابراین، بزرگترین دو عددی که با این سه رقم ساخته می‌شود، عبارتند از دو عدد $\overline{abc}$ و $\overline{acb}$. درضمن $\overline{acb} < \overline{abc}$، ولی، دراین صورت باید داشته باشیم:

$$۲\overline{abc} > ۱۴۴۴ \text{ و } ۲\overline{acb} < ۱۴۴۴$$

از آنجا $\overline{abc} > ۷۲۲$ و $\overline{acb} < ۷۲۲$ که، از آن‌ها، بلافاصله نتیجه می‌شود $a = ۷$ و $c < ۲$، یعنی $c = ۱$، و بنابراین، باید داشته‌باشیم:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = (۷۰۰ + ۱۰b + ۱) + (۷۰۰ + ۱۰ + b) =$$
$$= ۱۴۱۱ + ۱۱b$$

که باید برابر ۱۴۴۴ باشد، یعنی $b = ۳$.

راه‌حل دوم. طبق فرض داریم:

$$\overline{abc}+\overline{acb}=۱۴۴۴$$

که اگر عددها را باز کنیم:

$$۲۰۰a+۱۱(b+c)=۱۴۴۴$$

این برابری را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۱۱(b+c)-۴۴=۲۰۰(۷-a)$$

سمت چپ این برابری بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس باید سمت راست آن هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد و این، ممکن نیست، مگر داشته‌باشیم $a=۷$، دراین‌صورت به‌دست می‌آید: $b+c=۴$ و چون $b>c$، پس $b=۳$ و $c=۱$.

۹۲. مجموع دو عدد دورقمی از ۲۰۰ کمتر است، بنابراین $e=۱$ و درنتیجه یکی از رقم‌های a، b، c یا d هم برابر است با ۱.

فرض می‌کنیم $a=۱$، دراین‌صورت، از برابری

$$\overline{۱b}+\overline{cd}=\overline{۱fg}$$

روشن می‌شود که $c=۸$ یا $c=۹$ (درغیر این‌صورت، از مجموع عددهای دورقمی، به عدد سه‌رقمی نمی‌رسیم). اگر $c=۸$، آن‌وقت

$$\overline{۱b}+\overline{۸d}=\overline{۱f۸} \text{ یا } \overline{۱b}+\overline{۸d}=\overline{۱۸g}$$

زیرا، با پذیرفتن $c=۸$، عدد ۸ یکی از عضوهای مجموعهٔ $\{e,f,g\}$ می‌شود. ولی حالت اول، یعنی $f=۸$ پذیرفتنی نیست، زیرا مقدار سمت

راست برابری از مقدار سمت چپ آن بیشتر می‌شود. از حالت دوم ممکن است به‌دست آید $f = ۰$ و، برای b، دو جواب به‌دست می‌آید:

$$۱۰ + ۹۹ = ۱۰۹ \quad و \quad ۱۹ + ۹۰ = ۱۰۹$$

درضمن، در حالت دوم، ممکن است داشته‌باشیم: $f = ۱$؛ ولی دراین‌صورت، به‌ازای هیچ مقداری از $b, d \in \{۱, ۹\}$، برابری برقرار نمی‌شود.

اکنون $a \neq ۱$ و $b = ۱$ می‌گیریم؛ دراین‌صورت، از برابری

$$\overline{a۱} + \overline{cd} = \overline{۱fg}$$

معلوم می‌شود که $d \neq ۹$، زیرا به‌ازای $d = ۹$ به‌دست می‌آید $g = ۰$ و، بنابراین، بنابر شرط دوم مساله، باید $a = ۰$ یا $c = ۰$، که ممکن نیست ($\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ عددهای دورقمی‌اند) بنابراین $d < ۹$ و

$$\overline{a۱} + \overline{cd} = \overline{۱d(d+۱)}$$

زیرا $d \in \{۱, f, d+۱\}$ و $d \neq ۱$. ولی

$$\{a, ۱\} \cup \{c, d\} = \{۱, d, d+۱\}$$

و $a \neq ۱$، پس یا

$$\overline{d۱} + \overline{(d+۱)d} = \overline{۱d(d+۱)},$$

یا

$$\overline{(d+۱)۱} + \overline{dd} = \overline{d(d+۱)}$$

و یا

$$\overline{(d+۱)۱} + \overline{(d+۱)d} = \overline{۱d(d+۱)}$$

درضمن، دوبرابری اول، باشرط $d+(d+۱)=۱۰+d$، یعنی به‌ازای $d=۹$ برقرارند، درحالی‌که $d<۹$، ولی برابری سوم، به‌ازای $d=۸$ برقرار است و جواب دیگری برای مساله به‌دست می‌آید:

$$۹۱+۹۸=۱۸۹$$

در حالت‌های $c=۱$ ویا $d=۱$، نقش a و c یا b و d، باهم عوض می‌شود و به‌همان پاسخ‌ها می‌رسیم.

پاسخ. دستگاهی که در صورت مساله داده شده‌است ۶ جواب دارد:

$$۱)\ ۱۰+۹۹-۱۰۹;\quad ۲)\ ۹۹+۱۰=۱۰۹;$$
$$۳)\ ۱۹+۹۰=۱۰۹;\quad ۴)\ ۹۰+۱۹=۱۰۹;$$
$$۵)\ ۹۱+۹۸=۱۸۹;\quad ۶)\ ۹۸+۹۱=۱۸۹$$

۹۳. باتوجه به‌صورت مساله، عددهای x و y، دو رقمی‌اند (چون در آن‌ها، صحبت از مجموع رقم‌ها رفته‌است)؛ ولی z می‌تواند یک‌رقمی باشد. a و b را رقم‌های عدد x می‌گیریم:

$$x=۱۰a+b$$

پس $y=a+b$ و چون y هم دورقمی است، پس

$$z=a+b-۹$$

و باتوجه به شرط دیگر مساله، باید داشته‌باشیم:

$$(۱۰a+b)+(a+b)+(a+b-۹)=۶۰ \Rightarrow ۴a+b=۲۳$$

که تنها به جواب $a=۴$ و $b=۷$ می‌رسد (چرا؟).

پاسخ. $x=۴۷$، $y=۱۱$، $z=۲$.

۴. توان

۹۴. نه! اگر $a = ۰$، آن‌وقت $a^۰$ بی‌معنی می‌شود: $a^۰ = ۱$، به‌شرطی که $a \neq ۰$؛ همچنین $(x - ۲)^۰$ برابر است با ۱، به‌شرطی که x برابر ۲ نباشد.

۲) نه! درحالت $a = b$ خواهیم داشت $a^n = b^n$؛ درضمن، اگر a و b قرینهٔ هم و n عددی زوج باشد، بازهم $a^n = b^n$، مثلاً

$$۲^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$

درحالت‌های دیگر a^n با b^n برابر نیست.

۳) برای عددهای مثبت a و b، وقتی $a > b$، به‌شرط $n \in \mathbf{N}$، داریم $a^n > b^n$؛ ولی اگر n عددی منفی باشد، آن‌وقت خواهیم‌داشت $a^n < b^n$.
مثلاً اگر $a = ۳$، $b = ۲$ و $n = -۱$ باشد:

$$a^n = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}; \quad b^n = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$

و روشن است که $\frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲}$.

۴) نه! برای $x = ۰$ و $x = ۱$ داریم: $x^۲ = x$؛
برای $x > ۱$ داریم: $x^۲ > x$.
برای $۰ < x < ۱$ داریم: $x^۲ < x$، مثلاً به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$، داریم $x^۲ = \frac{۱}{۴}$ و روشن است که $\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۲}$.
برای عددهای منفی x، همیشه $x^۲ > x$، زیرا دراین حالت، x منفی و $x^۲$ مثبت است و عدد مثبت، همیشه از عدد منفی بزرگتر می‌شود.
بنابراین، وقتی $x^۲ > x$ که یا x عددی منفی باشد ویا عددی مثبت و بزرگتر از واحد.

.۹۵

$$۱)\ ۳^{۴} \times ۹^{-۲} = ۳^{۴} \times (۳^{۲})^{-۲} = ۳^{۴} \times ۳^{-۴} = ۳^{۰} = ۱;$$

$$۲)\ ۲^{-۴}(۲^{-۲})^{-۳} = ۲^{-۴} \times ۲^{۶} = ۲^{۲} = ۴;$$

$$۳)\ \frac{۳^{-۵}}{۳^{۴}} : ۳^{-۷} = \frac{۱}{۳^{۵} \times ۳^{۴}} : \frac{۱}{۳^{۷}} = \frac{۱}{۳^{۹}} \times ۳^{۷} = \frac{۱}{۹};$$

$$۴)\ (۵^{-۵})^{-۱} \cdot (\frac{۱}{۲})^{-۲} : ۱۰^{-۵} = ۵^{۵} \cdot ۲^{۲} : \frac{۱}{۱۰^{۵}} =$$

$$= ۵^{۵} \times ۲^{۲} \times (۵ \times ۲)^{۵} = ۵^{۵} \times ۲^{۲} \times ۵^{۵} \times ۲^{۵} = ۵^{۱۰} \times ۲^{۷};$$

$$۵)\ (۳^{-۳})^{-۲} \cdot ۳^{-۵} \cdot ۲۷ = ۳^{۶} \times ۳^{-۵} \times ۳^{۳} = ۳^{۴} = ۸۱;$$

$$۶)\ ۴^{-۶} \cdot ۲۵۶^{۲} \cdot ۲^{۴} = ۴^{-۶} \times (۴^{۴})^{۲} \times (۲^{۲})^{۲} =$$

$$= ۴^{-۶} \times ۴^{۸} \times ۴^{۲} = ۴^{۴} = ۲۵۶$$

.۹۶

$$۱)\ ۷^{m+۲} = ۷^{۱} \Rightarrow m + ۲ = ۱ \Rightarrow m = -۱;$$

$$۲)\ ۵^{m+۳} = ۵^{-۱} \Rightarrow m + ۳ = -۱ \Rightarrow m = -۴;$$

$$۳)\ ۱۱^{۲m-۳} = ۱۱^{۱} \Rightarrow ۲m - ۳ = ۱ \Rightarrow m = ۲;$$

$$۴)\ ۹^{m} = ۳^{۲m}\ \text{و}\ ۲m - ۵ = ۱ \Rightarrow m = ۳;$$

$$۵)\ ۳^{m+۲} = ۳^{۷} \Rightarrow m + ۲ = ۷ \Rightarrow m = ۵;$$

$$۶)\ ۲^{-۱} \times ۲^{m} = ۲^{m-۱}\ \text{و}\ ۴ \times ۲^{m} = ۸ \times ۲^{m-۱}$$

بنابراین، برابری به این صورت در می‌آید:

$$۲^{m-۱} + ۸ \times ۲^{m-۱} = ۹ \times ۲^{۵}$$

از آن‌جا، با جمع دوجملهٔ سمت چپ برابری

$$۹ \times ۲^{m-۱} = ۹ \times ۲^{۵} \Rightarrow ۲^{m-۱} = ۲^{۵} \Rightarrow m - ۱ = ۵ \Rightarrow m = ۶$$

۹۷. یا $m = ۰$ که، دراین‌صورت، $a^m = b^m = ۱$؛ یا $a = b$ و m برابر عددی دلخواه.

۹۸.

$$۱)\ (۲۷a^{۳}b^{۲}c)(۳ab^{۵}) = ۸۱a^{۴}b^{۷}c;$$

$$۲)\ \frac{x^{۱۲}y^{۷}t^{۳}}{x^{۷}y^{۳}t} = x^{۱۲-۷}y^{۷-۳}t^{۳-۱} = x^{۵}y^{۴}t^{۲};$$

$$۳)\ (۲p^{۴}q^{۴}s^{۱۴})^{۵} = ۲^{۵}p^{۴\times۵}q^{۴\times۵}s^{۱۴\times۵} = ۳۲p^{۲۰}s^{۷۰}$$

۹۹.

$$۱)\ \frac{۱}{x^{۵}} = x^{-۵}; \qquad ۲)\ ۰/۰۱ = \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰^{۲}} = ۱۰^{-۲};$$

$$۳)\ ۰/۰۰۰۰۰۱ = \frac{۱}{۱۰^{۶}} = ۱۰^{-۶}; \qquad ۴)\ \frac{۱}{۵} = ۵^{-۱};$$

$$۵)\ \frac{۱}{a} = a^{-۱}; \qquad ۶)\ \frac{۲}{۷} = ۲ \times ۷^{-۱};$$

$$۷)\ \frac{a}{a+b} = a(a+b)^{-۱};$$

$$۸)\ \frac{۳a^{۴}b^{۲}}{cd^{۳}} = ۳a^{۴}b^{۲}c^{-۱}d^{-۳}$$

۱۰۰.

$$۱)\ ۳^{-۲} \times ۵^{-۳} \times ۲^{۷} = \frac{۱}{۳^{۲}} \times \frac{۱}{۵^{۳}} \times ۲^{۷} =$$

$$= \frac{۲^۷}{۳^۲ \times ۵^۳} = \frac{۱۲۸}{۹ \times ۱۲۵} = \frac{۱۲۸}{۱۱۲۵};$$

$$۲)\ a^۲b^{-۱} = a^۲ \cdot \frac{۱}{b} = \frac{a^۲}{b};$$

$$۳)\ \frac{a^{-۱} \cdot b}{c^{-۱}d} = \frac{\frac{۱}{a} \cdot b}{\frac{۱}{c} \cdot d} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{ad};$$

۱۰۱. ۱)

۶۸۷۹۶	۲
۳۴۳۹۸	۲
۱۷۱۹۹	۳
۵۷۳۳	۳
۱۹۱۱	۳
۶۳۷	۷
۹۱	۷
۱۳	۱۳
۱	

$$۶۸۷۹۶ = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۷^۲ \times ۱۳$$

۲) $۸۰۲۴ = ۲^۳ \times ۱۷ \times ۵۹$؛

۳) $۵۱۰۵۱۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷$؛

۱۰۲. باتوجه به معیارهای بخش‌پذیری، عدد ۹۷۱، بر ۲، ۳، ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر نیست. با تقسیم مستقیم معلوم می‌شود که بر ۷ و بر ۱۳ هم بخش‌پذیر نیست. بازهم با تقسیم مستقیم، روشن می‌شود که عدد ۹۷۱، بر ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و ۳۱ هم بخش‌پذیر نیست. درضمن، در تقسیم بر ۳۱، به خارج‌قسمت ۳۱ و باقی‌ماندهٔ ۱۰ می‌رسیم:

$$۹۷۱ = ۳۱ \times ۳۱ + ۱۰$$

بنابراین، عدد ۹۷۱، نه بر عددی کوچکتر از ۳۱ و نه بر عددی بزرگتر از ۳۱ بخش‌پذیر نیست. اگر ۹۷۱، بر عددی بزرگتر از ۳۱ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت، خارج‌قسمت، عددی کوچکتر از ۳۱ می‌شود که باید ۹۷۱ بر آن بخش‌پذیر باشد، درحالی‌که روشن کردیم بر عددی کوچکتر از ۳۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۰۳. باید عددها را به‌صورت ضرب توان‌های عددهای اول تجزیه کرد؛ آن‌وقت، بزرگترین بخشیاب مشترک عبارت است از حاصل‌ضرب همهٔ عامل‌های مشترک دو عدد. یعنی باید عامل‌های با پایهٔ مشترک و نمای کوچکتر را درنظر گرفت.

برای کوچکترین مضرب مشترک، باید پایه‌های مشترک را با نمای بزرگتر و هم همهٔ عامل‌های غیرمشترک را درهم ضرب کرد:

۱) $۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$ و $۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵$

بزرگترین بخشیاب مشترک $= ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$

کوچکترین مضرب مشترک $= ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ = ۱۸۰$

۲) $۲۵ = ۵^۲, ۳۵ = ۵ \times ۷;$

بزرگترین بخشیاب مشترک $= ۵;$

کوچکتری مضرب مشترک $= ۵^۲ \times ۷ = ۱۷۵;$

۳) $۸۰ = ۲^۴ \times ۵$ و $۵۶ = ۲^۳ \times ۷;$

بزرگترین بخشیاب مشترک $= ۲^۳ = ۸$ و

کوچکترین مضرب مشترک $= ۲^۴ \times ۵ \times ۷ = ۵۶۰;$

۴) $۱۶۹۲ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۴۷$ و $۵۷۶ = ۲^۶ \times ۳^۲;$

بزرگترین بخشیاب مشترک $= ۲^۲ \times ۳^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶;$

کوچکترین مضرب مشترک $= ۲^۶ \times ۳^۲ \times ۴۷ = ۲۷۰۷۲;$

$۵)\ ۲۷۷۲ = ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱$

$۶۲۸۳۲ = ۲^۴ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۷$

بزرگترین بخشیاب مشترک $= ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ = ۹۲۴,$

کوچکترین مضرب مشترک $= ۲^۴ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۷ = ۶۲۸۳۲$

۱۰۴. p و q را دو عدد اول می‌گیریم. اگر عدد موردنظر، به‌صورت $p \cdot q$ باشد، دارای چهار مقسوم‌علیه است:

$$۱, p, q, pq$$

و اگر به‌صورت $p^۲q$ باشد، شش مقسوم‌علیه دارد:

$$۱, p, q, p^۲, pq, p^۲q$$

بنابراین، عدد موردنظر ما، تنها یک عامل اول دارد، ولی اگر به‌صورت $p^۲$ باشد، دارای سه مقسوم‌علیه (۱، p و $p^۲$)، اگر به‌صورت $p^۳$ باشد، دارای چهار مقسوم‌علیه (۱، p، $p^۲$ و $p^۳$) است و تنها وقتی پنج مقسوم‌علیه (وفقط پنج مقسوم‌علیه) دارد که به‌صورت $p^۴$ باشد:

$$۱, p, p^۲, p^۳, p^۴$$

بنابراین، عدد سه‌رقمی، توان چهارم یک عدد اول است.

پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد: $۵^۴ = ۶۲۵$.

۱۰۵. توان‌های پشت‌سرهم عدد ۹ را درنظر می‌گیریم:

$$۹^۱ = \mathbf{۹},\ ۹^۲ = ۸\mathbf{۱},\ ۹^۳ = ۷۲\mathbf{۹},\ ۹^۴ = \ldots \mathbf{۱}$$

رقم سمت راست حاصل توان‌ها را، نمایان‌تر نشان داده‌ایم. به‌سادگی می‌بینیم، اگر نما عدد ۹ فرد باشد، حاصل توان به ۹ ختم می‌شود و اگر نما عددی

زوج باشد، حاصل توان به ۱ ختم می‌شود:

$$۹^{۲k} = \ldots ۱ \text{ و } ۹^{۲k+۱} = \ldots ۹ \quad (k \in \text{ن})$$

۹۹ عدد فردی است و، بنابراین، عدد $۹^{۹۹}$ به رقم ۱ ختم می‌شود.

۱۰۶. شبیه مسالهٔ قبل است. فقط در این‌جا با حالت‌های بیشتری سروکار داریم. توان‌های پُشت‌سرهم ۷ را آزمایش می‌کنیم:

$$۷^۱ = ۷, ۷^۲ = ۴۹, ۷^۳ = ۳۴۳, ۷^۴ = ۲۴۰۱$$

از این بعد، همین چهار رقم ۷، ۹، ۳ و ۱ مرتباً تکرار می‌شود. نتیجهٔ این آزمایش را، می‌توان به‌این صورت تنظیم کرد: برای رقم سمت راست عدد ۷^m $(m \in \mathrm{N})$ می‌توان گفت:

۱) اگر $m = ۴k + ۱$ (یعنی عدد m در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ ۱ برسد)، عدد ۷^m به ۷ ختم می‌شود؛

۲) اگر $m = ۴k + ۲$ (در تقسیم m بر ۴، باقی‌مانده برابر ۲ شود)، رقم سمت راست عدد ۷^m برابر ۹ است؛

۳) اگر $m = ۴k + ۳$ (از تقسیم عدد m بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ به‌دست آید)، عدد ۷^m بر ۳ ختم می‌شود؛

۴) و سرانجام، اگر $m = ۴k$ (یعنی m بر ۴ بخش‌پذیر باشد)، رقم سمت راست عدد ۷^m برابر ۱ می‌شود.

در مسالهٔ داریم $m = ۷^۷$. پس باید ببینیم از تقسیم عدد $۷^۷$ بر ۴، چه باقی‌مانده‌ای به‌دست می‌آید؛ یعنی عدد $۷^۷$، کدام حالت از حالت‌های

$$۴k + ۱, ۴k + ۲, ۴k + ۳, ۴k$$

می‌تواند باشد؟

7^7 عددی فرد است، پس یا به‌صورت $4k + 1$ است و یا به‌صورت $4k + 3$.

اگر به این نکته‌ها توجه کنیم، حل مساله بسیار ساده می‌شود.

الف) وقتی بخواهیم باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم، مثلاً عدد 1374^{101} را بر یک عدد مثلاً ۱۱ پیدا کنیم، می‌توان باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم پایه، یعنی ۱۳۷۴ بر ۱۱ را پیدا کرد.

$$1374 = 124 \times 11 + 10 \qquad (1)$$

آن‌وقت، به‌جای 1374^{101}، عدد 10^{101} را درنظر گرفت.

ب) رابطهٔ (۱)، یعنی رابطهٔ تقسیم را می‌توان این‌طور نوشت:

$$1374 = 125 \times 11 - 1$$

یعنی اگر، یک واحد به خارج‌قسمت اضافه کنیم، به باقی‌ماندهٔ منفی ۱− می‌رسیم و، بنابراین، باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$(-1)^{101} = -1$$

بر ۱۱ را پیدا کنیم که همان ۱− می‌شود. و اگر به باقی‌ماندهٔ مثبت برگردیم، معلوم می‌شود، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم 1374^{101} بر ۱۱ برابر است با ۱۰.

به مسالهٔ خودمان برگردیم. باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد 7^7 را بر ۴ پیدا کنیم. داریم

$$7 = 1 \times 4 + 3 = 2 \times 4 - 1$$

پس باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $(-1)^7$ را بر ۴ پیدا کنیم (به‌جای باقی‌ماندهٔ ۳، باقی‌ماندهٔ ساده‌تر ۱− را درنظر گرفتیم). ولی $(-1)^7$ برابر

است با ۱ −، یعنی از تقسیم $۷^۷$ بر ۴، به باقی‌ماندهٔ ۱ − یا ۳ می‌رسیم: عدد $۷^۷$ به‌صورت $۴k + ۳$ درآمد و، بنابراین، عدد $۷^{۷^۷}$ به رقم ۳ ختم می‌شود.

۱۰۷. در مسالهٔ قبل، روش کار را آموختیم. عدد ۹۰۱ را بر ۳۱ تقسیم می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم را به‌دست می‌آوریم:

$$۹۰۱ = ۲۹ \times ۳۱ + ۲$$

بنابراین، باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد $۲^{۱۳۷۴}$ بر ۳۱ را پیدا کرد. به‌ترتیب داریم:

$$۲^{۱۳۷۴} = ۲^{۱۳۷۰+۴} = ۲^۴(۲^۵)^{۲۷۴} = ۱۶ \times ۳۲^{۲۷۴}$$

ولی عدد ۳۲ در تقسیم بر ۳۱ به باقی‌مانده‌ای رابر ۱ می‌رسد. پس باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$۱۶ \times ۱^{۲۷۴} = ۱۶$$

را بر ۳۱ به‌دست آورد که برابر همان ۱۶ می‌شود.

۱۰۸. وقتی عددی را بر ۶ تقسیم کنیم، ممکن است به یکی از این ۶ باقی‌مانده برسیم:

$$۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

یعنی هر عدد طبیعی را می‌توان به یکی از این ۶ گونه نوشت.

$$۶k, ۶k + ۱, ۶k + ۲, ۶k + ۳, ۶k + ۴, ۶k + ۵$$

عددهای به‌صورت $۶k$، $۶k + ۲$، $۶k + ۳$ و $۶k + ۴$، نمی‌توانند اول باشند: $۶k$ بر ۶ بخش‌پذیر است؛ $۶k + ۲$ بر ۲، $۶k + ۳$ بر ۳ و $۶k + ۴$ بر ۲.

دو حالت باقی می‌ماند: $۶k+۱$ و $۶k+۵$ که ممکن است اول باشند. اما به‌جای باقی‌ماندهٔ ۵، می‌توان ۱− را درنظر گرفت (حل مسالهٔ ۱۰۶ را ببینید)، بنابراین، هر عدد اول یا به‌صورت $۶k+۱$ است ویا به‌صورت $۶k-۱$. مثلاً عددهای اول ۱۳، ۱۹، ۴۳، ۱۰۳ به‌صورت $۶k+۱$ هستند؟

$$۱۳ = ۶ \times ۲ + ۱; \quad ۱۹ = ۶ \times ۳ + ۱; \quad ۴۳ = ۶ \times ۷ + ۱;$$
$$۱۰۳ = ۶ \times ۱۷ + ۱$$

و عددهای اول ۱۱، ۱۷، ۴۱ و ۱۰۱ به‌صورت $۶k-۱$:

$$۱۱ = ۶ \times ۲ - ۱; ۱۷ = ۶ \times ۳ - ۱; ۴۱ = ۶ \times ۷ - ۱;$$
$$۱۰۱ = ۶ \times ۱۷ - ۱$$

ولی عکس این حکم درست نیست، عدد ۲۵، عددی اول نیست، در حالی که به‌صورت $۶k+۱$ است:

$$۲۵ = ۶ \times ۴ + ۱$$

عدد ۷۷ اول نیست، درحالی که به‌صوت $۶k-۱$ است:

$$۷۷ = ۶ \times ۱۳ - ۱$$

۱۰۹. در مسالهٔ ۱۰۸، دیدیم که عدد اول p به یکی از دوصورت $۶k+۱$ یا $۶k-۱$ است.

۱) اگر $p = ۶k + ۱$ آن‌وقت

$$p + ۵ = ۶k + ۶ = ۶(k + ۱)$$

که بر ۶ بخش‌پذیر است:

۲) اگر $p = ۶k - ۱$، آن‌وقت

$$p + ۵ = ۶k + ۴ = ۲(۳k + ۲)$$

که بر ۲ بخش‌پذیر است.

اگر عدد اول ۲ را کنار بگذاریم، همهٔ عددهای اول فردند و، بنابراین:

اگر با عدد فردی مثل ۵ جمع شوند، عددی زوج به‌دست می‌آید که اول نیست. برای عدد اول ۲، مجموع ۵ + ۲، یعنی ۷ اول است، ولی ۱۰ + ۲، یعنی ۱۲ اول نیست.

۱۱۰. یک عدد طبیعی، می‌تواند به یکی از این سه صورت باشد:

$$۳k, ۳k + ۱, ۳k + ۲$$

اگر عد اول p به‌صورت $۳k + ۱$ باشد:

$$p = ۳k + ۱ \quad (k \in \mathbf{Z})$$

(مثل ۷ یا ۱۳ یا ۱۹ و غیره)، به‌دست می‌آید:

$$p + ۱۴ = ۳k + ۱۵ = ۳(k + ۵)$$

که بر ۳ بخش‌پذیر است و اول نیست.

اگر عدد اول p به‌صورت $۳k + ۲$ باشد (مثل ۱۱، ۱۷، ۵۳ و غیره)، آن‌وقت

$$p + ۱۰ = ۳k + ۱۲ = ۳(k + ۴)$$

که اول نیست (بر ۳ بخش‌پذیر است).

پس هر عدد به‌صورت $3k+1$ یا $3k+2$ نمی‌تواند جواب مساله باشد؛ تنها می‌ماند، عدد اول به‌صورت $3k$. ولی $3k$، تنها به‌ازای $k=1$، عددی اول است: $p=3$ که دراین‌صورت، دو عدد

$$p+10=13 \text{ و } p+14=17$$

هم، عددهایی اول می‌شوند.

پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد: $p=3$.

۱۱۱. به‌ترتیب داریم:

$$A>(2\times 5)\times 10\times 11\times 12\times\ldots\times 20=A'$$

اگر به‌جای 5×2، برابر آن ۱۰ را درنظر بگیریم، در A'، درست ۱۲ عامل وجود دارد که دوتا از آن‌ها برابر ۱۰ و بقیه بزرگتر از ۱۰ هستند، پس

$$A>A'>10^{12}\Rightarrow A>10^{12}$$

درمجموع B، یک میلیون جمله وجود دارد که، جز جملهٔ آخر، همه از یک میلیون کوچکترند، یعنی اگر همهٔ جمله‌های جمع را برابر یک میلیون بگیریم، داریم:

$$B<1000000\times 1000000=10^6\times 10^6=10^{12}$$

$A>10^{12}$ و $B<10^{12}$، پس $A>B$.

۱۱۲. در این دنباله

$$\text{جملهٔ اول}=6+2;\quad \text{جملهٔ دوم}=6\times 2+2;$$
$$\text{جملهٔ سوم}=6\times 3+2;\ldots;\quad n\text{جملهٔ}\ \text{ام}=6n+2$$

جملهٔ nام را، به‌طور معمول با u_n نشان می‌دهیم:

$$u_n = ۶n + ۲$$

چون $۶n$ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس هر جملهٔ این دنباله، در تقسیم بر ۳، باید باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته‌باشد.

اکنون A را عددی طبیعی می‌گیریم. اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۱− (همان ۲) پیدا می‌کند، بنابراین باقی‌ماندهٔ عدد به‌صورت $a^۲$، $a^۴$ یا $a^۶$ (یا هر توان زوجی از a) بر ۳، برابر $(\pm ۱)^۲$، یعنی ۱ می‌شود.

به‌این ترتیب، هیچ توان زوجی از یک عدد طبیعی در بین جمله‌های دنباله پیدا نمی‌شود: هر توان زوجی در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد، درحالی که از تقسیم هرجملهٔ دنباله بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به‌دست می‌آید. ولی توان‌های فرد، در بین جمله‌های دنباله وجود دارد:

$$u_۱ = ۸ = ۲^۳; u_۵ = ۳۲ = ۲^۵; u_{۲۱} = ۲^۷$$

یادداشت. اگر $n = \frac{۲^{۲m} - ۱}{۳}$ فرض کنیم، آن‌وقت.

$$u_n = ۲^{۲m+۱}$$

مثلاً بافرض $m = ۴$، به‌دست می‌آید:

$$n = \frac{۲^۸ - ۱}{۳} = \frac{۲۵۵}{۳} = ۸۵ \text{ و } u_{۸۵} = ۲^۹$$

یعنی جملهٔ هشتادوپنجم دنبالهٔ ما، برابر $۲^۹ = ۵۱۲$ است. ویا به‌ازای $m = ۵$، داریم

$$n = \frac{۲^{۱۰} - ۱}{۳} = \frac{۱۰۲۳}{۳} = ۳۴۱, u_{۳۴۱} = ۲^{۱۱}$$

۱۱۳. کوچکترین عدد اول برابر است با ۲، بنابراین، عدد مفروض نمی‌تواند از ۱۰ (یعنی ۵ برابر ۲) کمتر باشد. ۱۰ عددی اول نیست، ۱۱ را هم نمی‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت، زیرا

$$۱۱ = ۲ + ۹ = ۳ + ۸ = ۴ + ۷ = ۵ + ۶$$

کوچکترین عدد اول مورنظر مساله، برابر است با ۱۳، زیرا

$$۱۳ = ۲ + ۱۱ = ۳ + ۳ + ۷ = ۲ + ۲ + ۲ + ۷ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۵$$

ولی اگر بخواهیم، جمله‌های جمع باهم متفاوت باشند، عدد موردنظر ما، نمی‌تواند از

$$۲ + ۳ + ۵ + ۷ + ۱۱ = ۲۸$$

کمتر باشد، ۲۹ پاسخ مساله نیست، زیرا مثلاً به مجموع دو عدد اول قابل‌تبدیل نیست. ۳۱ جواب نیست؛ آن را می‌توان به مجموع ۲، ۳ و ۴ عدد اول تبدیل کرد:

$$۳۱ = ۲ + ۲۹ = ۷ + ۱۱ + ۱۳ = ۲ + ۵ + ۱۱ + ۱۳$$

ولی به مجمع ۵ عدد اول تبدیل نمی‌شود.

۳۷، مثلاً به مجموع دو عدد اول قابل‌تبدیل نیست. ۴۱ راهم نمی‌توان به مجموع دو عدد اول تبدیل کرد. ولی برای ۴۳ داریم:

$$۴۳ = ۲ + ۴۱ = ۷ + ۱۷ + ۱۹ = ۲ + ۵ + ۱۷ + ۱۹ =$$
$$= ۳ + ۵ + ۷ + ۱۱ + ۱۷$$

۱۱۴. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عددهای ۵۵۵۵ و ۲۲۲۲ بر ۷، به‌ترتیب، برابر است با ۴ و ۳:

$$۵۵۵۵ = ۷ \times ۷۹۳ + ۴; ۲۲۲۲ = ۷ \times ۳۱۷ + ۳$$

بنابراین، باید ثابت کنیم، عدد

$$۴^{۲۲۲۲} + ۳^{۵۵۵۵}$$

بر ۷ بخش‌پذیر است. این عدد را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(۴^۲)^{۱۱۱۱} + (۳^۵)^{۱۱۱۱} = ۱۶^{۱۱۱۱} + ۳۴۳^{۱۱۱۱}$$

از تقسیم ۱۶ بر ۷ به باقی‌ماندهٔ ۲ و از تقسیم ۳۴۳ بر ۷ به باقی‌مانده $۲-$ (یا ۵) می‌رسیم. پس باید باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$۲^{۱۱۱۱} + (-۲)^{۱۱۱۱} = ۲^{۱۱۱۱} - ۲^{۱۱۱۱} = ۰$$

را بر ۷ پیدا کرد که برابر صفر است.

۱۱۵. روشن است که $۲۴۳^{۱۱} > ۲۴۲^{۱۱}$. ولی

$$۲۴۳^{۱۱} = (۳^۵)^{۱۱} = ۳^{۵۵}$$

ولی $۵۶ > ۵۵$ و $۵۶ = ۴ \times ۱۴$، پس

$$۳^{۵۵} < ۳^{۴\times۱۴} = (۳^۴)^{۱۴} = ۸۱^{۱۴}$$

وچون $۸۳ > ۸۱$، پس $۸۱^{۱۴} < ۸۳^{۱۴}$

اگر همهٔ این‌ها را ردیف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲۴۲^{۱۱} < ۳^{۵۵} < ۳^{۵۶} = ۸۱^{۱۴} < ۸۳^{۱۴}$$

یعنی $۲۴۲^{۱۱} < ۸۳^{۱۴}$.

۱۱۶. عددهایی که در تقسیم بر ۷ به باقی‌ماندهٔ ۵ می‌رسند، دنباله‌ای بی‌پایان را تشکیل می‌دهند:

$$۵, ۱۲, ۱۹, ۲۶, ۳۳, ۴۰, ۴۷, ۵۴, \ldots$$

در این دنباله، ۵۴، نخستین عددی است که در تقسیم بر ۱۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد و، درضمن، جزو عددهایی است که در تقسیم بر ۷، به باقی‌ماندهٔ ۵ می‌رسد:

$$۵۴ = ۷ \times ۷ + ۵; \quad ۵۴ = ۱۳ \times ۴ + ۲$$

همین عدد ۵۴، در تقسیم بر ۹۱ (۱۳×۷) خارج‌قسمتی برابر صفر و باقی‌مانده‌ای برابر ۵۴ دارد. اگر بخواهیم، عددهایی را پیدا کنیم که در تقسیم بر ۹۱، خارج‌قسمتی مخالف صفر داشته‌باشند، می‌توانیم مضربی از ۹۱ (یعنی ۷×۱۳) را به ۵۴ اضافه کنیم:

$$۹۱ + ۵۴ = ۱۴۵; \quad ۲ \times ۹۱ + ۵۴ = ۲۳۶;$$
$$۳ \times ۹۱ + ۵۴ = ۳۲۷; \ldots$$

اگر n را عددی طبیعی فرض کنیم، صورت کلی این عددها، چنین است:

$$۹۱n - ۳۷ \text{ یا } ۹۱n + ۵۴ \quad (n \in \mathrm{N})$$

پاسخ. اگر عددی در تقسیم بر ۷ و ۱۳، به‌ترتیب، باقی‌مانده‌هایی برابر ۵ و ۲ داشته‌باشد، در تقسیم بر ۱۳×۷، یعنی ۹۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۵۴ پیدا می‌کند. مجموعهٔ این عددها، که مجموعه‌ای بی‌پایان است، چنین است:

$$\{۵۴, ۱۴۵, ۲۳۶, ۳۲۷, ۴۱۸, ۵۰۹, ۶۰۰, \ldots\}$$

یادداشت. عدد n باید به‌صورت $۷k + ۵$ و $۱۳m + ۲$ باشد (k و m عددهایی طبیعی‌اند). پس

$$۷k + ۵ = ۱۳m + ۲ \Rightarrow k = \frac{۱۳m - ۳}{۷}$$

و اگر $۱۳m$ را $۱۴m - m$ درنظر بگیریم:

$$k = ۲m - \frac{m + ۳}{۷}$$

چون k عددی طبیعی است، پس $m + ۳$ باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد، یعنی باید داشته‌باشیم:

$$m = ۷n - ۳$$

که دراین صورت به‌دست می‌آید:

$$k = ۱۳n - ۶ \quad (n \in \mathbf{N})$$

که اگر مقدار m را در عبارت $۱۳m + ۲$ یا مقدار k را در عبارت $۷k + ۵$ قرار دهیم، در هر دوحالت، به یک نتیجه می‌رسیم:

$$۹۱n - ۳۷$$

۱۱۷. در مسالهٔ ۱۱۶ دیدیم، برای این‌که عدد طبیعی N، در تقسیم بر ۷ به باقی‌ماندهٔ ۵ و در تقسیم بر ۱۳ به باقی‌ماندهٔ ۲ برسد، باید به‌این صورت باشد:

$$N = ۹۱n - ۳۷ \quad (n \in \mathbf{N})$$

در این‌جا، درضمن می‌خواهیم، در تقسیم N بر ۱۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ به‌دست آید:

$$N = ۱۷p + ۱ \quad (p \in \mathbf{N})$$

یعنی باید داشته‌باشیم:

$$۱۷p + ۱ = ۹۱n - ۳۷ \Rightarrow p = \frac{۹۱n - ۳۸}{۱۷}$$

ویا $p = ۵n - ۲ + \frac{۶n - ۴}{۱۷}$. باید $۶n - ۴$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد،

$$۶n - ۴ = ۱۷q(q \in \mathrm{N}) \Rightarrow n = \frac{۱۷q + ۴}{۶} =$$

$$= ۳q - \frac{q - ۴}{۶} \quad (q \in \mathrm{N})$$

کوچکترین عددی که می‌توان به‌جای q قرار داد تا n، عددی طبیعی باشد، عبارت است از $q = ۴$ که دراین صورت به‌دست می‌آید:

$$n = ۱۲ \text{ و } p = ۶۲$$

و از آن‌جا، کوچکترین مقدار N پیدا می‌شود:

$$N = ۹۱n - ۳۷ = ۹۱ \times ۱۲ - ۳۷ = ۱۰۵۵;$$

$$N = ۱۷p + ۱ = ۱۷ \times ۶۲ + ۱ = ۱۰۵۵$$

۱۰۵۵ کوچکترین عددی است که در تقسیم بر عددهای ۷ و ۱۳ و ۱۷، به‌ترتیب، باقی‌مانده‌هایی برابر ۵ و ۲ و ۱ می‌دهد.

برای پیدا کردن، عددهای دیگری که دارای ویژگی این عدد باشد، باید مضربی از $۱۷ \times ۱۳ \times ۷$، یعنی مضربی از ۱۵۴۷ را به آن اضافه کرد.

بنابراین، مجموعهٔ عددهای دارای ویژگی عدد N، چنین است:

$$\{x | x = ۱۵۴۷k + ۱۰۵۵, k \in \mathrm{N}) =$$

$$= \{۱۰۵۵, ۲۶۰۲, ۴۱۴۹, ۵۶۹۶, \ldots\}$$

۱۱۸. به‌ترتیب داریم:

$$۸^۹ = (۲^۳)^۹ = ۲^{۲۷} = (۲^۹)^۳ = ۵۱۲^۳ =$$

$$= (۲ \times ۲۵۶)^۳ > (۲ \times ۲۴۳)^۳ = (۲ \times ۳^۵)^۳ =$$

$$= ۸ \times ۳^{۱۵} > ۳ \times ۳^{۱۵} = ۳^{۱۶} = (۳^۲)^۸ = ۹^۸$$

به‌این ترتیب $۹^۸ > ۸^۹$.

۱۱۹. این قضیه، یعنی بی‌پایان بودن مجموعهٔ عددهای اول را، اقلیدس، صدها سال پیش از میلاد ثابت کرد.

اقلیدس، اثبات را با برهان خُلف می‌دهد، یعنی ثابت می‌کند، اگر فرض کنیم، تعداد عددهای اول، محدود است، به تناقض می‌رسیم.

اگر تعداد عددهای اول، محدود باشد، به‌معنای آن است که، در مجموعهٔ عددهای اول، یکی از عددها، از همهٔ دیگران بزرگتر است و عدد اولی بزرگتر از آن وجود ندارد.

این بزرگترین عدد اول را p می‌نامیم و عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$A = (۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times \ldots \times p) + ۱$$

عدد A تشکیل شده‌است از مجموع عدد ۱ با حاصل‌ضرب همهٔ عددهای اول (از ۲ که کوچکترین عدد اول است تا p که، طبق فرض ما، بزرگترین عدد اول است). عدد A، بر هیچ‌یک از عددهای اول داخل پرانتز بخش‌پذیر نیست و در تقسیم بر هرکدام از آن‌ها، به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد. پس یا عدد A عددی است اول و یا بر عدد اولی بزرگتر از p بخش‌پذیر است. هرکدام از این دو حالت را بپذیریم، به‌معنای این است که عدد اولی بزرگتر از p وجود دارد؛ چیزی که فرض ما را نقض می‌کند.

۱۲۰. در ریاضیات نمی‌توان و نباید همیشه منتظر یک پاسخ قاطع بود. ریاضیات، به‌قول گالیله، زبان طبیعت است. چه در طبیعت و چه در زندگی، هر نتیجه‌گیری، مبتنی بر عامل‌هایی است که، با تاثیر خود، موجب آن نتیجه می‌شوند. اگر دریک یا چند عامل، تغییر حاصل شود، نمی‌توان منتظر بود که نتیجه تغییر نکند. مسالهٔ ۱۲۰ را این‌طور طرح می‌کنیم تا مطلب روشن‌تر شود:

در یک منبع ۱۰۰۰ لیتر و در منبع دوم ۸۰۰ لیتر آب وجود دارد. از منبع

اول ساعتی ۱۰۰ لیتر و از منبع دوم ساعتی ۵۰ لیتر آب برمی‌دارند. مقدار آب باقی‌مانده در دو منبع را، بعد از x ساعت، باهم مقایسه کنید.

بعد از x ساعت، در منبع اول ($۱۰۰۰ - ۱۰۰x$) لیتر و، در منبع دوم ($۸۰۰ - ۵۰x$) لیتر آب باقی می‌ماند و باید این دومقدار را باهم مقایسه کنیم (که همان مسالهٔ ۱۲۰ است). در جدول زیر، همه‌چیز روشن است:

x	$۱۰۰۰ - ۱۰۰x$	$۸۰۰ - ۵۰x$
۱	۹۰۰	۷۵۰
۲	۸۰۰	۷۰۰
۳	۷۰۰	۶۵۰
۴	۶۰۰	۶۰۰
۵	۵۰۰	۵۵۰
۶	۴۰۰	۵۰۰

جدول نشان می‌دهد، اگر x برابر ۱ یا ۲ یا ۳ ساعت باشد، آن‌وقت مقدار آب منبع اول بیشتر از مقدار آب منبع دوم است.

اگر x را برابر ۴ ساعت بگیریم، آن‌وقت مقدار آب دو منبع، باهم برابرند.

از ساعت چهارم به‌بعد، مقدار آب منبع دوم از مقدار آب منبع اول بیشتر می‌شود.

بنابراین، به پرسش مسالهٔ ۱۲۰، باید این‌طور پاسخ داد:

۱) به‌ازای $x < ۴$ (یا دقیق‌تر، به‌ازای $۰ < x < ۴$):

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x > ۸۰۰ - ۵۰x$$

۲) به‌ازای $x = ۴$:

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x = ۸۰۰ - ۵۰x$$

۳) برای $x > ۴$:

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x < ۸۰۰ - ۵۰x$$

(و اگر مساله به‌صورت دو منبع آب مطرح شده‌باشد، باید این نکته راهم به حل مساله اضافه کنیم که، بعد از ۱۰ ساعت آب منبع اول، و بعد از ۱۶ ساعت، آب منبع دوم تمام می‌شود).

a. مجموعهٔ عددهای گویا

۱۲۱. هردو کسر، هنوز ساده می‌شوند:

$$۱)\frac{۱۰۲}{۱۸۷} = \frac{۶ \times ۱۷}{۱۱ \times ۱۷} = \frac{۶}{۱۱};$$

$$۲)\frac{۵۲}{۹۱} = \frac{۱۳ \times ۴}{۱۳ \times ۷} = \frac{۴}{۷}$$

۱۲۲. راه‌های ساده‌تر، دراین‌جا مشخص شده‌است:

$$۱)۷۸\frac{۵}{۶} + ۲۴\frac{۳}{۴} = ۱۰۲\frac{۱۰ + ۹}{۱۲} = ۱۰۲\frac{۱۹}{۱۲} = ۱۰۳\frac{۷}{۱۲};$$

$$۲)۹۷\frac{۵}{۶} - ۳۲\frac{۷}{۹} = ۶۵\frac{۱۵ - ۱۴}{۱۸} = ۳۵\frac{۱}{۱۸};$$

$$۳)۵\frac{۱۷}{۲۴} \times ۳ = ۱۵\frac{۱۷}{۸} = ۱۷\frac{۱}{۸};$$

(درواقع، $۵\frac{۱۷}{۲۴}$ یعنی $\frac{۱۷}{۲۴} + ۵$. هر عدد را جداگانه در ۳ ضرب کردیم).

$$۴)۱۸\frac{۳}{۵} : ۲ = ۹\frac{۳}{۱۰}$$

(ابتدا ۱۸ وبعد $\frac{۳}{۵}$ را بر ۲ تقسیم کردیم).

$$۵)\ \frac{۵}{۱۸} + \frac{۱۱}{۲۴} = \frac{۲۰ + ۳۳}{۷۲} = \frac{۵۳}{۷۲}$$

(در صورت مساله، به‌جای پیدا کردن کوچکترین مخرج مشترک، مخرج‌ها را درهم ضرب کرده‌است).

۶) بعد از تجنیس، به ضرب $\frac{۵۶}{۲۷} \times \frac{۲۴۳}{۱۴}$ رسیدیم که صورت و مخرج قابل ساده‌شدن است: ۲۴۳ و ۲۷ به ۲۷ ساده می‌شود و ۵۶ و ۱۴ به ۱۴؛ واین ضرب به‌صورت $\frac{۴}{۱} \times \frac{۹}{۱}$، یعنی ۳۶ درمی‌آید.

۱۲۳. $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ را به‌یک مخرج تبدیل و، بعد، صورت و مخرج هرکدام را ۱۶ برابر می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶} = \frac{۳۲}{۹۶}; \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} = \frac{۴۸}{۹۶}$$

بین ۳۲ و ۴۸، درست ۱۵ عدد طبیعی قرار دارد و، بنابراین، ۱۵ کسری که مقدار آن‌ها بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ باشد، چنین‌اند:

$$\frac{۳۳}{۹۶}, \frac{۳۴}{۹۶}, \frac{۳۵}{۹۶}, \ldots, \frac{۴۵}{۹۶}, \frac{۴۶}{۹۶}, \frac{۴۷}{۹۶}$$

که البته، برخی از آن‌ها ساده می‌شوند.

می‌توانستیم، بدون تبدیل به‌یک مخرج، عمل کنیم:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱۶}{۴۸}; \frac{۱}{۲} = \frac{۱۶}{۳۲}$$

۱۵ کسر بین $\frac{۱۶}{۴۸}$ و $\frac{۱۶}{۳۲}$ چنین‌اند:

$$\frac{۱۶}{۴۷}, \frac{۱۶}{۴۶}, \frac{۱۶}{۴۵}, \ldots, \frac{۱۶}{۳۵}, \frac{۱۶}{۳۴}, \frac{۱۶}{۳۳}$$

و همیچنین، چون $\frac{a+c}{b+d}$، مقداری بین دو مقدار $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است، می‌توان پشت‌سرهم، کسرهای بینابینی را پیدا کرد. دراین‌جا، درسطر اول دوکسر $\frac{۱}{۳}$ و

$\frac{۱}{۲}$ و سپس، در سطرهای بعد، به‌ترتیب، کسرهای بینابینی داده شده‌است:

۱) $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲};$

۲) $\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۸}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۷}, \frac{۱}{۲};$

۴) $\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۱۱}, \frac{۳}{۸}, \frac{۵}{۱۳}, \frac{۲}{۵}, \frac{۵}{۱۲}, \frac{۳}{۷}, \frac{۴}{۹}, \frac{۱}{۲}$

۵) $\frac{۱}{۳}, \frac{۵}{۱۴}, \frac{۴}{۱۱}, \frac{۷}{۱۹}, \frac{۳}{۸}, \frac{۸}{۲۱}, \frac{۵}{۱۳}, \frac{۷}{۱۸}, \frac{۲}{۵},$
$\frac{۷}{۱۷}, \frac{۵}{۱۲}, \frac{۸}{۱۹}, \frac{۳}{۷}, \frac{۷}{۱۶}, \frac{۴}{۹}, \frac{۵}{۱۱}, \frac{۱}{۲}$

در سطر پنجم، کسرها، به‌ترتیب صعودی (یعنی از کم به زیاد) آمده‌اند و درست ۱۵ عدد بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ واقع است.

یادداشت. ۱۵ عددی که در یکی از سه راه‌حل به‌دست آوریم، با ۱۵ عدد راه‌حل دیگر فرق دارد. درواقع، بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد که، در هریک از راه‌حل‌ها، برخی از آن‌ها را نوشته‌ایم.

۱۲۴. a و $\frac{۱}{a}$ عکس یکدیگرند و حاصل‌ضربی برابر واحد دارند:

$$a \times \frac{۱}{a} = ۱$$

بنابراین، اگر a عددی مثبت و بزرگتر از ۱ باشد، $\frac{۱}{a}$ عددی مثبت و کوچکتر از ۱ می‌شود. درحالت منفی بودن a هم، می‌توان استدلال مشابهی داشت.
پاسخ مساله، مشروط است:

۱) اگر $a = 1$ یا $a = -1$، آن‌وقت $\frac{1}{a} = a$؛

۲) اگر $a > 1$ یا $-1 < a < 0$، آن‌وقت $\frac{1}{a} < a$؛

۳) اگر $0 < a < 1$ یا $a < -1$، آن‌وقت $\frac{1}{a} > a$.

۱۲۷. ۱) $\frac{۱۵}{۲۸} < \frac{۱۷}{۱۸}$ (۱۷ به ۱۸ خیلی نزدیکتر است تا ۱۵ به ۲۸)؛ ۲) $\frac{۷}{۸} > \frac{۵}{۶}$، باید به‌صورت و مخرج کسر $\frac{۵}{۶}$، ۲ واحد اضافه کرد تا برابر $\frac{۷}{۸}$ شود و ولی اگر به‌صورت و مخرج کسری که از واحد کوچکتر است، یک مقدار اضافه کنیم، کسر بزرگتر می‌شود؛ ۳) $\frac{۷}{۱۲} > \frac{۳}{۸}$. ۳ از نصف ۸ کوچکتر و ۷ از نصف ۱۲ بزرگتر است؛ ۴) $\frac{۵}{۱۲} > \frac{۳}{۸}$. ۸برابر $\frac{۳}{۸}$ یعنی ۳، از ۸برابر $\frac{۵}{۱۲}$ یعنی $\frac{۱۰}{۳}$ کوچکتر است؛ ۵) $\frac{۹۷}{۹۱} > \frac{۱۰۳}{۹۷}$. کسر $\frac{۹۷}{۹۱}$ از واحد بزرگتر است. بنابراین، با اضافه‌شدن ۶واحد به‌صورت و مخرج آن، به‌واحد نزدیکتر، یعنی کوچکتر می‌شود.

۱۲۸.

$$۱۶۸ \times \frac{۷}{۸} = ۲۱ \times ۷ = ۱۴۷;$$

$$\frac{۲۰}{۲۷} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۴}{۹};$$

$$۲\frac{۲۲}{۲۵} \times \frac{۵}{۱۲} = ۲ \times \frac{۵}{۱۲} + \frac{۲۲}{۲۵} \times \frac{۵}{۱۲} =$$

$$= \frac{۵}{۶} + \frac{۱۱}{۳۰} = \frac{۲۵ + ۱۱}{۳۰} = \frac{۳۶}{۳۰} = ۱\frac{۱}{۵};$$

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

.۱۲۹

$$۱)\ ۱۹۵ : \frac{۱۳}{۱۵} = ۱۹۵ \times \frac{۱۵}{۱۳} = ۲۲۵,$$

$$۲)\ ۵۱ : \frac{۱۷}{۲۳} = ۵۱ \times \frac{۲۳}{۱۷} = ۶۹;$$

$$۳)\ ۴\frac{۱}{۶} : \frac{۵}{۱۲} = \frac{۲۵}{۶} \times \frac{۱۲}{۵} = ۱۰$$

۱۳۰. پاسخ: ۶۹۰ نفر

۱۳۱. پاسخ. ۱۸۲ کیلومتر. راهنمائی. ابتدا ببینید، هر قطار دریک ساعت، چه‌کسری از فاصلهٔ بین دوشهر را طی می‌کند!

۱۳۲. قبل‌از آغاز عمل و حل تمرین‌ها، دقت کنید با چه عددهایی وبا چه عمل‌هایی سروکار دارید و این عمل را به‌چه راهی باید انجام دهید: کدام عمل مقدم است و کدام عمل را باید برای مرحلهٔ بعدی نگاه داشت. در این‌جا، پاسخ‌ها داده شده‌است:

$۱)\ ۲۶\frac{۲}{۳}$؛ $۲)\ ۷\frac{۱}{۲}$؛ ۳) ۵.

۱۳۳. برای ضرب یک عدد دهدهی در ۱۰^n $(n \in \mathrm{N})$، باید ممیز را nرقم به‌سمت راست منتقل کرد و برای تقسیم بر ۱۰^n باید ممیز را nرقم به‌سمت چپ برد:

$$۰/۰۱۴ \times ۱۰۰ = ۱/۴;\ ۰/۰۱۴ : ۱۰۰ = ۰/۰۰۰۱۴$$

۱۳۴. وقتی مخرج کسر، تنها شامل توان‌هایی از عددهای اول ۲ یا ۵ باشد، می‌توان با ضرب صورت و مخرج دریک عدد مناسب، مخرج را به‌شکل ۱۰^n درآورد:

$$\frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۲^۳} = \frac{۵ \times ۵^۳}{۲^۳ \times ۵^۳} = \frac{۶۲۵}{۱۰^۳} = ۰/۶۲۵;$$

$$\frac{۱۹}{۲۵} = \frac{۱۹}{۵^{۲}} = \frac{۱۹ \times ۲^{۲}}{۵^{۲} \times ۲^{۲}} = \frac{۷۶}{۱۰^{۲}} = ۰/۷۶;$$

$$\frac{۳}{۴۰} = \frac{۳ \times ۲۵}{۴۰ \times ۲۵} = \frac{۷۵}{۱۰۰۰} = ۰/۰۷۵;$$

$$\frac{۶}{۱۲۵} = \frac{۶ \times ۸}{۱۲۵ \times ۸} - \frac{۴۸}{۱۰۰۰} = ۰/۰۴۸;$$

$$\frac{۱۵۱}{۱۰ \times ۲^{۵}} = \frac{۱۵۱ \times ۵^{۵}}{۱۰ \times ۱۰^{۵}} = \frac{۳۷۱۸۷۵}{۱۰^{۶}} = ۰/۳۷۱۸۷۵;$$

$$\frac{۳۱۲}{۶۲۵} = \frac{۳۱۲ \times ۲^{۴}}{۵^{۴} \times ۲^{۴}} = \frac{۴۹۹۲}{۱۰^{۴}} = ۰/۴۹۹۲$$

۱۳۵.

$$۱)\ ۱ : \frac{۰/۱ - ۰/۰۹}{۰/۶ - ۰/۵۸} = ۱ : \frac{۰/۰۱}{۰/۰۲} = ۱ : \frac{۱}{۲} = ۲;$$

۲) *پاسخ*. ۱؛ ۳) *پاسخ*. ۱۰۴.

۱۳۶. *پاسخ*. ۹۹۰کیلوگرم.

۱۳۷. طول هر گام کارگر بلند را واحد می‌گیریم. او در ۱۰۰ گام خود، ۱۰۰ واحد طول به‌جلو می‌رود، درهمین مدت کارگر کوتاه ۲۰ + ۱۰۰، یعنی ۱۲۰ گام جلو می‌رود. ولی هرگام او ۸۰درصد، یعنی ۰/۸ کارگر بلند طول دارد

$$۱۲۰ \times ۰/۸ = ۹۶$$

به‌این‌ترتیب، وقتی کارگر بلند ۱۰۰ واحد طول جلو می‌رود، کارگر کوتاه ۹۶ واحد طول می‌پیماید و ۴ واحد طول عقب می‌ماند.

پاسخ. کارگر بلند، زودتر به کارخانه می‌رسد.

۱۳۸. هر ۱۰۰کیلوگرم، در زمان استخراج ۹۸ کیلوگرم زغال‌سنگ خالص دارد. ولی ۱۰۰ کیلوگرم، بعد از دو شبانه‌روز ۸۸ کیلوگرم زغال

خالص دارد (از ۱۰۰کیلوگرم، ۱۲ کیلوگرم آن، آب است.) به‌این‌ترتیب، بعد از آن که زغال، دو شبانه‌روز در هوای آزاد باشد، هر ۸۸ کیلوگرم خالص آن ۱۰۰ کیلوگرم وزن دارد. باید ببینیم ۹۸کیلوگرم زغال‌سنگ خالص، چقدر وزن دارد:

$$\begin{matrix} ۸۸ & ۱۰۰ \\ ۹۸ & ? \end{matrix} \quad ? = \frac{۹۸ \times ۱۰۰}{۸۸} \approx ۱۱۱$$

پاسخ. بعد از دو شبانه‌روز، به‌هر ۱۰۰ کیلوگرم زغال‌سنگ استخراج شده، ۱۱ کیلوگرم اضافه می‌شود.

۱۳۹. ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب آب، بعد از یخ بستن، ۱۰۹ سانتی‌متر مکعب حجم پیدا می‌کند یا، برعکس، هر ۱۰۹ سانتی‌متر مکعب یخ، به ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب آب تبدیل می‌شود. باید ببینیم هر ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب یخ، به چند سانتی‌متر مکعب آب تبدیل می‌شود:

$$\begin{matrix} ۱۰۹ & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ? \end{matrix} \quad ? = \frac{۱۰۰ \times ۱۰۰}{۱۰۹} \approx ۹۱/۷$$

پاسخ. ۸/۳٪ حجم یخ، بعد از آب شدن، کم می‌شود.

۱۴۰. *پاسخ.* چاپ سوم ارزان‌تر است. اگر هر جلد چاپ اول کتاب ۱۰۰ تومان قیمت داشته‌باشد، چاپ دوم آن ۱۲۰ تومان و چاپ سوم آن ۹۶ تومان خواهدبود.

یادداشت. پاسخ این مساله را می‌توان، بدون محاسبه داد. در چاپ دوم، هر واحد قیمت چاپ اول افزایش می‌یابد و به ۱/۲ واحد تبدیل می‌شود و در چاپ سوم از این ۱/۲ واحد ۲۰٪ کم می‌شود و روشن است که ۲۰درصد ۱/۲ از ۲۰درصد واحد بیشتر است.

۱۴۱. پاسخ: ۷۹٪.

۱۴۲. نه! فرض کنید، تعداد مسافرها ۱۰۰ نفر باشند! ازاین ۱۰۰نفر ۷۰ نفر ایرانی و ۷۰ نفر مردند. ولی از این ۷۰ مرد، می‌تواند ۳۰ نفر غیرایرانی باشد و تنها ۴۰ نفر ایرانی.

۱۴۳. اگر بخواهیم بدانیم، عدد a، چنددرصد عدد b است، بهترین و ساده‌ترین روش، استفاده از دستور زیر است:

$$\frac{a \times ۱۰۰}{b}$$

$$۱)\ \frac{۲۵ \times ۱۰۰}{۳۷۵} = \frac{۱۰۰}{۱۵} = \%\frac{۲۰}{۳} \approx \%۶/۷;$$

$$۲)\ \frac{۸\frac{۳}{۴} \times ۱۰۰}{۲۵۰} = \frac{۳۵ \times ۱۰۰}{۴ \times ۲۵۰} = \%۳/۵;$$

$$۳)\ \frac{\frac{۳}{۸} \times ۱۰۰}{\frac{۵}{۷}} = \frac{۳ \times ۱۰۰ \times ۷}{۸ \times ۵} = \%۵۲/۵;$$

$$۴)\ \frac{۰/۰۷ \times ۱۰۰}{۲/۵} = \frac{۷۰}{۲۵} = \%۲/۸$$

۱۴۴. اگر جمعیت شهر در ۱۰ سال پیش ۱۰۰ باشد، جمعیت فعلی آن ۱۱۰ نفر می‌شود. به‌این‌ترتیب، ۱۱۰٪ جمعیت ۱۰ سال قبل این شهر برابر ۵۵۰۰۰نفر است و درنتیجه، جمعیت ۱۰سال قبل برابر است با

$$\frac{۵۵۰۰۰ \times ۱۰۰}{۱۱۰} = ۵۰۰۰۰$$

۱۴۵.

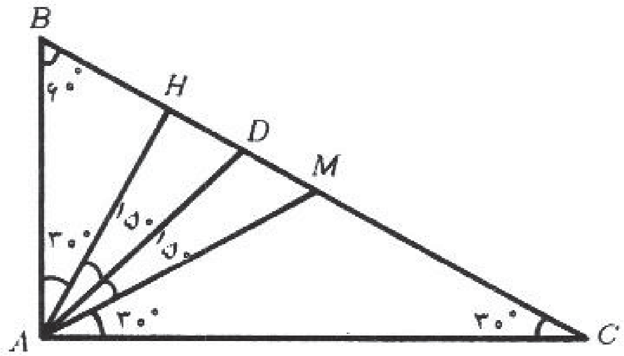
$$\text{عدد اول} = \frac{۲p}{۲+۳+۷} = \frac{۲p}{۱۲} = \frac{۱}{۶}p;$$

$$\text{عدد دوم} = \frac{۳p}{۲+۳+۷} = \frac{۳p}{۱۲} = \frac{۱}{۴}p;$$

$$\text{عدد سوم} = \frac{۷p}{۲+۳+۷} = \frac{۷p}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}p$$

درواقع، عدد اول به‌تقریب ۱۷٪، عدد دوم ۲۵٪ و عدد سوم به‌تقریب ۵۸٪ عدد p می‌شود.

۱۴۶. شکل ۳۸ همه‌چیز را روشن می‌کند. زاویهٔ A، چه ازطرف ضلع



شکل ۳۸

کوچکتر و چه ازطرف ضلع بزرگتر، به نسبت‌های ۳۰ : ۱۵ : ۱۵ : ۳۰ یا ساده‌تر به نسبت‌های

۲ : ۱ : ۱ : ۲

تقسیم شده‌است.

۱۴۷. مسافتی که پیاده در دو روز آخر پیموده‌است، به‌نسبت ۲ : ۳ بوده‌است، و چون این مسافت روی‌هم ۴۵ کیلومتر است پس

$$\text{برای روز چهارم} = \frac{۳ \times ۴۵}{۳+۲} = ۲۷ \text{ (کیلومتر) };$$

$$\text{برای روز پنجم} = \frac{۲ \times ۴۵}{۳+۲} = ۱۸ \text{ (کیلومتر)}$$

از نسبت‌های فرض، معلوم می‌شود که، روز اول، به‌اندازه روز پنجم، روز دوم به‌اندازهٔ سه‌برابر روز پنجم و روز سوم به‌اندازه دوبرابر روز پنجم راه رفته‌است.

پاسخ. ۱۵۳ کیلومتر.

۱۴۸. *پاسخ*. $\frac{۴}{۵}$ (نسبت حجم ظرف کوچکتر به حجم ظرف بزرگتر).

۱۴۹. *پاسخ*. ۸ : ۱۵ : ۱۲.

۱۵۰. *پاسخ*. همان ۹۷٪.

۱۵۱. عدد اول را a و عدد دوم را b می‌گیریم. بنابر فرض مساله، باید ۴۰٪ از عدد a با ۶۰٪ از عدد b برابر باشد، یعنی

$$۰/۴a = ۰/۶b$$

با این برابر می‌توان یک تناسب درست کرد و نسبت دو عدد a و b را به‌دست آورد:

$$\frac{a}{b} = \frac{۰/۶}{۰/۴} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین، باید ۱۲۰ را به‌نسبت ۲ : ۳ تقسیم کنیم.

پاسخ. عدد اول ۷۲ و عدد دوم ۴۸.

۱۵۲. *راهنمائی*. عدد دوم برابر عدد اول است.

پاسخ. ۰۰٪

۱۵۳. نه! اگر دو مربع را با ضلع‌های a و b بگیریم، نسبت ضلع‌ها برابر $\frac{a}{b}$ و نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{a^۲}{b^۲}$. ولی $\frac{a}{b}$ با $\frac{a^۲}{b^۲}$ (درحالت‌کلی) برابر نیست، یعنی اگر $a \neq b$، آن‌وقت، برای به‌دست آوردن نسبت $\frac{a^۲}{b^۲}$ باید در نسبت $\frac{a}{b}$، صورت را در a و مخرج را در b (یعنی در دو عدد مختلف) ضرب کرد که، درنتیجه، با کسر $\frac{a}{b}$ برابر درنمی‌آید.

۱۵۴. اگر طول ضلع مربع را a بگیریم. بعداز آنکه ۲۰٪ بزرگ شود، برابر $۱/۲a$ می‌شود. چون مساحت مربع با مجذور کردن طول ضلع آن به‌دست می‌آید، مساحت مربع اصلی برابر $a^۲$ و مساحت مربع بزرگ‌شده برابر

$$۱/۲a \times ۱/۲a = ۱/۴۴a^۲$$

می‌شود. یعنی مساحت مربع ۱/۴۴برابر شده‌است، یا به‌زبان دیگر، ۴۴٪ به‌مساحت آن اضافه شده‌است.

۱۵۵. اگر عدد دوم را a بگیریم، عدد اول برابر $۱/۲۵a$ می‌شود. اکنون عدد دوم را با عدد اول مقایسه می‌کنیم (عدد اول را ۱۰۰٪ به‌حساب می‌آوریم):

$$\frac{a \times \%۱۰۰}{۱/۲۵} = \%۸۰$$

یعنی عدد دوم، ۲۰٪ از عدد اول کوچکتر است.

۱۵۶. پاسخ ۴/۵ کیلومتر درساعت.

۱۵۷. ۱) از قانون تفضیل نسبت‌ها در مخرج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۵+x}{(۵+x)-(۲+x)} = \frac{۴}{۴-۳} \Rightarrow \frac{۵+x}{۳} = \frac{۴}{۱} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۵+x = ۱۲ \Rightarrow x = ۷;$$

$$۲)\ \frac{(۹+x)-x}{x} = \frac{۴-۱}{۱} \Rightarrow \frac{۹}{x} = ۳ \Rightarrow x = ۳;$$

$$۳)\ \frac{(۱۰-x)+x}{x} = \frac{۴+۱}{۱} \Rightarrow \frac{۱۰}{x} = ۵ \Rightarrow x = ۲;$$

$$۴)\ \frac{(a+x)-x}{x} = \frac{(a+۱)-۱}{۱} \Rightarrow \frac{a}{x} = a \Rightarrow x = ۱;$$

$$۵)\ \frac{(a-x)+x}{x} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

۱۵۸. ۱) $\frac{۲+۳}{۳}=\frac{x+y}{y}$ یا $\frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{y}$؛ از آن‌جا به‌دست می‌آید $y=۶$ و سپس $x=۴$؛

۲) $\frac{۵}{۳}=\frac{x}{y}$، پس $\frac{۵-۳}{۳}=\frac{x-y}{y}$ و یا $\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{y}$، از این‌جا $y=۹$ و سپس $x=۱۵$؛

۳) پاسخ. $y=\frac{(a+b)b}{۲a+b}$ و $x=\frac{۲a(a+b)}{۲a+b}$؛

۴) پاسخ. $y=\frac{a(a-b)}{b}$ و $x=\frac{۲ab+a(a-b)}{b}$.

۱۵۹. باانجام عمل ترکیب نسبت‌ها درصورت و تفضیل نسبت‌ها در مخرج:

$$\frac{(am-bn)+(am+bn)}{(am+bn)-(am-bn)}=\frac{۱+۱۱}{۱۱-۱};$$

از این‌جا به تناسب $\frac{am}{bn}=\frac{۶}{۵}$ می‌رسیم و درنتیجه

$$\frac{a}{b}=\frac{۶}{۵}:\frac{m}{n}=\frac{۶}{۵}:\frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۵}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۵}$$

۱۶۰. $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=k$ می‌گیریم. دوطرف برابری را در k ضرب (ویا بر k تقسیم) می‌کنیم

$$\frac{a}{b}\cdot k=\frac{c}{d}\cdot k\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q};$$

$$\frac{a}{b}:k=\frac{c}{d}:k\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}=\frac{c}{d}\cdot\frac{q}{p}$$

۱۶۱. دو تناسب را، جمله‌به‌جمله، درهم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۶}{۵}\Rightarrow\frac{x}{z}=\frac{۴}{۵}\text{ یا }\frac{z}{x}=\frac{۵}{۴}$$

۱۶۲. با ضرب و تقسیم تناسب‌های مفروض به‌دست می‌آید.

$$\frac{aa_۱}{bb_۱} = \frac{۱}{۶}; \frac{a}{a_۱} : \frac{b}{b_۱} = \frac{۳}{۲}$$

۱۶۳. درواقع، باید عدد ۳۸۴۰ را به‌نسبت $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۸}$ تقسیم کنیم.

پاسخ. ۲۰۴۸ و ۱۷۹۲

۱۶۴. پیش‌از پاسخ به پرسش مساله، به‌دو نکته اشاره می‌کنیم.

۱) دستور محاسبهٔ دقیق حجم مخروط ناقص یا هرم ناقص، این است:

$$V = (S_۱ + \sqrt{S_۱ S_۲} + S_۲) \cdot \frac{h}{۳} \qquad (۲)$$

۲) اگر دو عدد مثبت a و b را درنظر بگیریم، همیشه میانگین حسابی آن‌ها، یعنی $\frac{a+b}{۲}$، از میانگین هندسی آن‌ها بزرگتر است، مگر وقتی‌که دو عدد a و b باهم برابر باشند. به‌زبان دیگر درحالت $a \neq b$:

$$\frac{a+b}{۲} > \sqrt{ab} \qquad (۴)$$

درحالت $a = b$، $\frac{a+b}{۲} = \sqrt{ab}$، زیرا

$$\frac{a+b}{۲} = \frac{a+a}{۲} = a \text{ و } \sqrt{ab} = \sqrt{a^۲} = a$$

مثلاً میانگین حسابی دو عدد ۲ و ۸ برابر $\frac{۲+۸}{۲}$، یعنی ۵، و میانگین هندسی آن‌ها برابر $\sqrt{۲ \times ۸}$، یعنی ۴ است. در این‌جا، میانگین حسابی، ۲۵٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$۴ + ۰/۲۵ \times ۴ = ۴ + ۱ = ۵$$

اگر دو عدد را از هم دورتر کنیم و مثلاً ۱ و ۹ بگیریم، میانگین حسابی آن‌ها برابر ۵ و میانگین هندسی آن‌ها برابر ۳ می‌شود و میانگین حسابی به‌تقریب ۶۷٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$۳ \times ۰/۶۷ \approx ۲; ۲ + ۳ = ۵$$

واگر دو عدد را ۹/۵ و ۰/۵ بگیریم (که میانگین حسابی آن‌ها برابر ۵ است)، دارای میانگین هندسی ۲/۱۸ می‌شوند و میانگین حسابی نزدیک به ۱۳۰٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$۲/۱۸ \times ۱/۳ \approx ۲/۸۳; ۲/۱۸ + ۲/۸۳ \approx ۵$$

۳) اگر در دستور (۲)، به‌جای $\sqrt{S_۱S_۲}$ (میانگین هندسی مساحت‌های دو قاعدهٔ مخطروط یا هرم ناقص)، میانگین حسابی آن، یعنی $\frac{S_۱ + S_۲}{۲}$ را قرار دهیم، به‌همان دستور (۱)، در صورت مساله، می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&(S_۱ + \sqrt{S_۱S_۲} + S_۱) \cdot \frac{h}{۳} = \\ &= (S_۱ + \frac{S_۱ + S_۲}{۲} + S_۲) \cdot \frac{h}{۳} = \\ &= \frac{۳(S_۱ + S_۲)}{۲} \cdot \frac{h}{۳} = \frac{S_۱ + S_۲}{۲} \cdot h\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب، دستور (۱) تنها وقتی دقیق است که میانگین حسابی و هندسی مساحت‌های دو قاعده، باهم برابر باشند، یعنی درحالتی که، دو قاعده مساحت‌هایی برابر داشته‌باشند؛ به‌زبان دیگر، وقتی‌که با استوانه یا منشور قائم سروکار داشته‌باشیم.

هرچه مقدار مساحت‌های دوقاعده ازهم دورتر باشند، دستور (۱) تقریبی‌تر و در برخی موردها اشتباه می‌شود. مثلاً، اگر مساحت قاعدهٔ بالا

را صفر بگیریم (یعنی با مخروط یا هرم سروکار داشته‌باشیم)، نتیجه به‌کلی دور از واقعیت می‌شود: حجم مخروط یا هرم، برابر است با $\frac{1}{3}$ حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع، ولی بنابر دستور (۱)، برابر $\frac{1}{2}$ حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع می‌شود.

باوجود این، در موردهای عملی، که نیازی به دقت کامل ریاضی نیست و درضمن، مساحت‌های دو قاعدهٔ مخروط یا هرم ناقص، خیلی ازهم دور نیستند، می‌توان، به‌جای دستور پیچیده‌تر (۲)، از دستور (۱) استفاده کرد.

به‌این مساله توجه کنید: حجم هرم ناقصی را محاسبه کنید که ارتفاعی برابر ۳ دارد و مساحت‌های دو قاعدهٔ آن به‌ترتیب برابر ۳ و ۱ است.

ابتدا حجم دقیق‌تر هرم ناقص را پیدا می‌کنیم:

$$V = \frac{h}{۳}(S_۱ + \sqrt{S_۱S_۱} + S_۲) =$$

$$= \frac{۳}{۳}(۳ + \sqrt{۳} + ۱) \approx ۵/۷۳۲$$

اکنون، اگر حجم همین هرم ناقص را به‌کمک دستور (۱) پیدا کنیم:

$$V \approx \frac{S_۱S_۲}{۲} \cdot h = \frac{۳ + ۱}{۲} \times ۳ = ۶$$

و این نتیجه، قریب ۵٪ از مقدار واقعی بیشتر است.

می‌بینید، حتی دراین‌مورد، که مساحت‌های دو قاعده، اختلاف زیادی با یکدیگر دارند (قاعدهٔ بزرگتر، سه‌برابر قاعدهٔ کوچکتر، مساحت دارد)، بازهم درعمل و وقتی مقدارهای تقریبی برای ما کافی باشد، جوابی که به‌کمک دستور (۱) به‌دست آمده‌است، پذیرفتنی است. و روشن است که هرچه، نسبت مساحت‌های دوقاعده، به واحد نزدیکتر باشد، جواب‌ها به‌هم نزدیکتر می‌شوند.

یادداشت. در خیلی موردها، می‌توان به‌کمک قضیه‌ها و دستورهایی که در هندسه مسطحه وجود دارد، قضیه‌ها و دستورهای مشابهی در هندسهٔ فضائی پیدا کرد. ولی باید توجه داشت که رفتن از صفحه به فضا، اغلب کیفیت کار را عوض می‌کند و نمی‌توان با سهل‌اندیشی، دستورها و قضیه‌هایی را در هندسهٔ فضائی (در شباهت با هندسهٔ مسطحه) جعل کرد.

دستور (۱) که در صورت مسالهٔ ۱۶۴ داده شده‌است، نوعی شباهت با دستوری در هندسهٔ مسطحه دارد و دستور هندسهٔ مسطحه مربوط به محاسبهٔ مساحت ذوزنقه است (که در شباهت با هندسهٔ فضائی می‌توان آن را مثلث ناقص نامید)! اگر دو قاعدهٔ ذوزنقه را با طول‌های a و b فرض کنیم، مساحت آن از دستور

$$S = \frac{a+b}{۲} \cdot h$$

(h ارتفاع ذوزنقه است) به‌دست می‌آید. ولی این دستور، در هندسهٔ مسطحه، درهر حالتی ($a \neq b$ یا $a = b$ یا $b = ۰$) درست است، درحالی‌که در مشابه فضایی آن [دستور (۱)] چنین نیست.

۱۶۵. *پاسخ‌ها*

$$\frac{۲}{۵} = ۰/۴;\ ۱\frac{۱}{۳} = ۱/(۳);\ \frac{۷۴}{۲۵} = ۲/۹۶;$$

$$\frac{۸}{۹} = ۰/(۸);\ \frac{۲}{۱۱} = ۰/(۱۸);\ \frac{۱}{۷} = ۰/(۱۴۲۸۵۷);$$

$$\frac{۴}{۷} = ۰/(۵۷۱۴۲۸);\ \frac{۱}{۱۳} = ۰/(۰۷۶۹۲۳);$$

$$\frac{۵}{۱۳} = ۰/(۳۸۴۶۱۵);\ \frac{۷}{۱۵} = ۰/۴(۶);$$

$$\frac{۱}{۱۲} = ۰/۰۸(۳)$$

.۱۶۶

$$۰/۱۲۵ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۸}; ۱/۴۸۴ = ۱\frac{۱۲۱}{۲۵۰};$$

$$۰/(۳۹) = \frac{۳۹}{۹۹} = \frac{۱۳}{۳۳}; ۱/(۷۸۳) = ۱\frac{۷۸۳}{۹۹۹} =$$

$$۱\frac{۸۷}{۱۱۱} = ۱\frac{۲۹}{۳۷} = \frac{۶۶}{۳۷};$$

$$۰/(۱۸۵) = \frac{۱۸۵}{۹۹۹} = \frac{۵ \times ۳۷}{۲۷ \times ۳۷} = \frac{۵}{۲۷};$$

$$۰/۲(۷) = \frac{۲۷ - ۲}{۹۰} = \frac{۲۵}{۹۰} = \frac{۵}{۱۸};$$

$$۴/۳(۲۷) = ۴\frac{۳۲۷ - ۳}{۹۹۰} = ۴\frac{۳۲۴}{۹۹۰} = ۴\frac{۱۸}{۵۵};$$

$$۰/۱۵(۳) = \frac{۱۵۳ - ۱۵}{۹۰۰} = \frac{۱۳۸}{۹۰۰} = \frac{۲۳}{۱۵۰};$$

$$۰/(۹) = ۰/۹۹۹\ldots = \frac{۹}{۹} = ۱$$

$$۰/۲(۹) = \frac{۲۹ - ۲}{۹۰} = \frac{۲۷}{۹۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

یادداشت. هر کسر دهدهی ساده را می‌توان به‌صورت یک کسر دوره‌ای (با دورهٔ گردش ۰ یا ۹). نوشت مثلاً

$$۲/۳ = ۲/۳۰۰۰\ldots = ۲/۳(۰);$$

$$۲/۳ = ۲/۲۹۹۹\ldots = ۲/۲(۹)$$

۱۶۷. در تقسیم یک عدد بر p، چون باقی‌مانده تقسیم باید از p کوچکتر باشد، تنها یکی از عددهای

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, p - ۱ \qquad (۲)$$

می‌تواند در باقی‌مانده ظاهر شود، یعنی اگر عمل تقسیم را تا ۱ − p رقم دنبال کنیم، به‌ناچار، یکی از همین عددهای دنبالهٔ (۱)، دوباره در باقی‌مانده ظاهر می‌شود. به‌این‌ترتیب، حداکثر تعداد رقم‌های دورهٔ گردش برای $\frac{1}{p}$ (p؛ عددی اول است) برابر است با ۱ − p. مثلاً

$$\frac{۱}{۷} = ۰/(۱۴۲۸۵۷) \quad (\text{۶ رقم})$$

$$\frac{۱}{۱۷} = ۰/(۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷) \quad (\text{۱۶ رقم})$$

ولی معمولاً، تعداد رقم‌های دورهٔ گردش، از ۱ − p کمتر است:

$$\frac{۱}{۳} = ۰/(۳) \quad (\text{یک رقم به‌جای دورقم})$$

$$\frac{۱}{۱۱} = ۰/(۰۹) \quad (\text{دورقم به‌جای ۱۰ رقم})$$

$$\frac{۱}{۳۱} = ۰/(۰۳۲۲۵۸۰۶۴۵۱۶۱۲) \quad (\text{۱۰ رقم به‌جای ۳۰ رقم})$$

ولی ثابت می‌کنند که تعداد رقم‌های دورهٔ گردش، همیشه مقسوم‌علیهی از ۱ − p است. برای ۱۳ = p، تعداد رقم‌های دورهٔ گردش برابر ۶ (مقسوم‌علیهی از ۱۲) و برای ۳۱ = p، تعداد رقم‌های دورهٔ گردش، برابر ۱۰ (مقسوم‌علیهی از ۳۰) شده‌است

۱۶۸. ۱) فرض می‌کنیم بخواهیم کسر دوره‌ای سادهٔ (۶۳)/۰ را به‌کسر متعارف تبدیل کنیم، مقدار عدد را x می‌گیریم:

$$x = ۰/۶۳۶۳۶۳\ldots \qquad (۱)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم (۱۰۰ یعنی $۱۰^۲$، و ۲ تعداد رقم‌های دورهٔ گردش است):

$$۱۰۰x = ۶۳/۶۳۶۳\ldots \qquad (۲)$$

برابری (۱) را از برابری (۲) کم می‌کنیم:

$$۹۹x = ۶۳ \Rightarrow x = \frac{۶۳}{۹۹}$$

درحالت کلی، عدد دهدهی دوره‌ای را $\overline{(abc\ldots d)}$ ۰/ و تعداد رقم‌های دورهٔ گردش آن را n می‌گیریم. اگر عدد را x بنامیم:

$$x = ۰/\overline{(abc\ldots d)}$$

و دوطرف برابری را در ۱۰^n ضرب کنیم:

$$۱۰^n x = \overline{abc\ldots d}/\overline{(abc\ldots d)}$$

با کم‌کردن مقدار x ازاین برابری به‌دست می‌آید.

$$(۱۰^n - ۱)x = \overline{abc\ldots d}$$

از طرف دیگر

$$۱۰^n - ۱ = ۹۹۹\ldots۹ \quad (n \text{ رقم})$$

بنابراین

$$x = \frac{\overline{abc\ldots d}}{۹۹۹\ldots۹}$$

۲) کسر دوره‌ای مرکب (۲۷)۲۵/۰ را درنظر می‌گیریم و آنرا x می‌نامیم، داریم:

$$۱۰۰x = ۲۵/(۲۷);$$

$$۱۰۰۰۰x = ۲۵۲۷/(۲۷);$$

$$۱۰۰۰۰x - ۱۰۰x = ۲۵۲۷ - ۲۵;$$

$$x = \frac{۲۵۲۷ - ۲۵}{۹۹۰۰} = \frac{۱۳۹}{۵۵۰}$$

درحالت کلی، اگر تعداد رقم‌های غیر گردش برابر n و تعداد رقم‌های گردش برابر m، باشد، بافرض برابر بودن عدد با x، تفاضل

$$۱۰^{m+n}x - ۱۰^{n}x$$

را محاسبه می‌کنیم و از آن‌جا x را به‌دست می‌آوریم.

مثلاً درکسر دهدهی $(۶۳)۱۸/۰$ داریم $m = n = ۲$.

به‌ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$x = ۰/۱۸(۶۳);$$

$$۱۰۰۰۰x = ۱۸۶۳/(۶۳);$$

$$۱۰۰x = ۱۸/(۶۳)$$

$$۹۹۰۰x = ۱۸۶۳ - ۱۸;$$

$$x = \frac{۱۸۴۵}{۹۹۰۰} = \frac{۴۱}{۲۲۰}$$

۶. مجموعهٔ عددهای حقیقی

۱۶۹. پاسخ. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

۱۷۰. پاسخ. ۱) گنگ، ۲) گنگ، ۳) گنگ، ۴) گویا ($\sqrt{۹}$ برابر ۳ و $\sqrt{۴}$ برابر ۲ و $\sqrt{۴} - \sqrt{۹}$ برابر ۱ است)؛ ۴) گنگ (حاصل عبارت، برابر $(\sqrt{۲} - ۱)۲$ می‌شود)؛ ۶) گویا؛ ۷) گنگ.

۱۷۱. عدد π تا ۱۴ رقم بعد از ممیز چنین است:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵۸۹۷۹\ldots$$

بنابراین، عددهای گویای زیر، بین ۱۴/۳ و π قرار دارند:

$$۳/۱۴۱, ۳/۱۴۱۵, ۳/۱۴۱۵۹, ۳/۱۴۱۵۹۲,$$

$$۳/۱۴۱۵۹۲۶, ۳/۱۴۱۵۹۲۶۳,$$
$$۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳, ۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵,$$
$$۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵۸, ۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵۸۹,$$
$$۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵۸۹۷$$

۱۷۲. $\sqrt{۲}$ از ۰/۴۱۴ بزرگتر است، زیرا مقدار $\sqrt{۲}$، تا پنج رقم بعد از ممیز چنین است:

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱\ldots$$

بنابراین عدد $\frac{۱/۴۱۴ + \sqrt{۲}}{۲}$، که عددی گنگ است، بین عدد گویای ۱/۴۱۴ و عدد گنگ $\sqrt{۲}$ قرار دارد:

$$۱/۴۱۴ < \frac{۱/۴۱۴ + \sqrt{۲}}{۲} < \sqrt{۲}$$

۱۷۳. *پاسخ.* ۱) اگر کسرها مثبت باشند، آن که صورتش بزرگتر است؛ اگر هردو کسر منفی باشند، آن که صورتش کوچکتر است؛ و اگر یکی از کسرها منفی و دیگری مثبت باشد، آن که مثبت است؛

۲) اگر هردو کسر مثبت باشند، آن که مخرج کوچکتر دارد. اگر هردو کسر منفی باشند، آن که مخرج بزرگتر دارد و اگر از دو کسر، یکی مثبت و دیگری منفی است آن که مثبت است؛

۳) آن که قدرمطلق بزرگتر دارد؛

۴) آن که قدر مطلق کوچکتر ارد.

۱۷۴. توجه داشته‌باشید که $|-a| = |a|$. بنابراین، باید به این پرسش پاسخ داد که a بزرگتر یا $|a|$.

پاسخ. اگر $a \geq ۰$، آن‌وقت $a = |a|$؛ اگر $a < ۰$، آن‌وقت $a < |a|$.

۱۷۵. دو حالت درنظر می‌گیریم: ۱) a و b هم‌علامت‌اند. دراین حالت، برای محاسبهٔ $a+b$، باید قدرمطلق‌های a و b را باهم جمع و سپس، علامت a یا b را به آن داد. بنابراین، دراین حالت

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow |a+b| = |a| + |b|$$

(وقتی می‌نویسیم، $ab > 0$، به‌معنای آن است که a و b، هم‌علامت‌اند).

۲) اگر a و b علامت‌های متفاوتی داشته‌باشند ($ab < 0$). آن‌وقت، برای محاسبهٔ $a+b$، باید تفاضل قدرمطلق‌های دو عدد a و b را به‌دست آورد و، سپس علامت عددی را درنظر گرفت که قدرمطلق بزرگتر دارد. پس

$$ab < 0 \Rightarrow |a+b| < |a| + |b|$$

درحالتی هم که a یا b یا هردو برابر صفر باشند، روشن است که

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow |a+b| = |a| + |b|$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری زیر، همیشه درست است:

$$|a| + |b| \leq |a+b|$$

۱۷۶. با استدلالی شبیه تمرین قبل نتیجه می‌شود:

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

علامت برابری برای حالتی است که a و b هم‌علامت باشند، درضمن $|b| < |a|$. در دیگر حالت‌ها، علامت نابرابری برقرار است.

۱۷۷. *پاسخ.* هردو برابری درست‌اند: حاصل‌ضرب قدرمطلق‌ها با قدرمطلق حاصل‌ضرب‌ و خارج‌قسمت قدرمطلق‌ها با قدرمطلق خارج‌قسمت برابر است.

۱۷۸. ۱) ۱؛ ۲) ۱ ($\sqrt{۸۲}$ از ۹ بزرگتر و از ۱۰ کوچکتر است)؛ ۳) ۱− ($۲\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۴}$ باهم برابرند؛ درضمن $۲\sqrt{۶}$ از ۵ کوچکتر است).

۱۷۹. طول ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه را a و b می‌نامیم. در این‌صورت: ۱) $a = ۱$ و $b = ۲$؛ ۲) $a = ۲$ و $b = ۳$؛ ۳) $a = ۱$ و $b = ۴$؛ ۴) $a = ۲$ و $b = ۶$؛ ۵) $a = ۲$ و $b = ۴$؛ ۶) $a = ۶$ و $b = ۱۱$.

۱۸۰. ۱) $\sqrt{۷}$ ریشه‌ای از معادلهٔ $x^۲ = ۷$ است؛ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲ = ۵$ است؛ ۳) $۲\sqrt{۳}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = ۱۲$ است.

۴) فرض می‌کنیم $x = \sqrt{۳} - ۱$، دراین‌صورت

$$x + ۱ = \sqrt{۳} \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۳$$

و این همان معادله‌ای است که یکی از ریشه‌های آن برابر $\sqrt{۳} - ۱$ است. معادله، بعد از ساده کردن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^۲ + ۲x = ۲$$

۵) شبیه ۴) عمل کنید. معادله‌ای که $۲ + \sqrt{۷}$، ریشه‌ای از آن است، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(x - ۲)^۲ = ۷ \Rightarrow x^۲ - ۴x = ۳$$

۱۸۱. اگر طول یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه، عددی زوج باشد، به‌معنای آن است که طول یکی از ضلع‌های مثلث، عددی است بخش‌پذیر بر ۲. ولی اگر طول هردو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه، عددهایی فرد باشند، به‌ناچار طول وتر مثلث، عددی زوج می‌شود (مجموع دو عدد فرد ویا مجموع

مجذورهای دو عدد فرد، برابر است با عددی زوج. درضمن، جذر عدد مجذور کامل زوج، عددی زوج است).

۲) اگر یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه، مضربی از ۳ باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر هردو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه بخش‌ناپذیر بر ۳ باشند، آن‌وقت باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم مجذور طول هر ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه بر ۳، برابر ۱ می‌شود (عددی که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، به‌صورت $۳k + ۱$ یا $۳k - ۱$ است که مجذور آن به‌صورت $۳k + ۱$ درمی‌آید). درنتیجه از مجموع دو عددی که، هریک در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد، عددی به‌دست می‌آید که در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. و چنین عددی (که باید برابر مجذور طول وتر باشد)، نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد. زیرا دیدیم، هر مجذور کاملی، به‌شرط بخش‌ناپذیر بودن بر ۳، تنها می‌تواند به‌صورت $۳k + ۱$ باشد نه $۳k + ۲$.

به‌این ترتیب، اگر طول ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه، هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، مثلث مفروض، فیثاغوری نخواهد بود (زیرا، برای طول وتر، عدد درستی به‌دست نمی‌آید).

بنابراین، به‌ناچار باید دست‌کم یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه، طولی بخش‌پذیر بر ۳ داشته‌باشد.

۳) هر عدد، ضمن تقسیم بر ۵، به‌صورت یکی از پنج حالت

$$۵k; ۵k \pm ۱; ۵k \pm ۲$$

است. بنابراین، مجذور هر عدد، ضمن تقسیم بر ۵، تنها ۳ حالت پیدا می‌کند

$$۵k \text{ یا } ۵k \pm ۱$$

اگر یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه، مضربی از ۵ باشد، حکم مساله، به‌خودی خود ثابت است. فرض می‌کنیم، هیچ‌کدام از طول‌های

دوضلع پهلوی زاویهٔ قائمه، بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، دراین‌صورت، مجذور این دو طول، یکی از سه حالت را خواهند داشت:

اول. هردو به‌صورت $۵k + ۱$ باشند. ولی این ممکن نیست، زیرا مجموع آن‌ها (یعنی مجذور وتر) به‌صورت $۵k + ۲$ درمی‌آید که برای هیچ عدد مجذور کاملی ممکن نیست.

دوم. هردو به‌صورت $۵k - ۱$باشند که، بازهم شبیه حالت قبل، برای مجموع آن‌ها، یک مجذور کامل به‌دست نمی‌آید.

سوم. تنها این حالت می‌ماند که مجذور طول‌های دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه، یکی به‌صورت $۵k + ۱$ و دیگری به‌صورت $۵k - ۱$ باشد که، دراین صورت، مجموع آن‌ها (یعنی مجذور وتر و درنتیجه، خود وتر) مضربی از ۵ خواهد بود.

۱۸۲. *پاسخ.*

$$۱)\ \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & (x > ۰) \\ -۱ & (x < ۰) \end{cases} \quad (x \neq ۰);$$

$$۲)\ \frac{|x|}{x} = \begin{cases} ۱ & (x > ۰) \\ -۱ & (x < ۰) \end{cases} \quad (x \neq ۰);$$

$$۳)\ x - |x| = \begin{cases} ۰ & (x \geq ۰) \\ ۲x & (x < ۰) \end{cases} \quad ;$$

$$۴)\ |x| + |x - ۵| = \begin{cases} -۲x + ۵ & (x \leq ۰) \\ ۵ & (۰ < x \leq ۵) \\ ۲x - ۵ & (x > ۵) \end{cases}$$

۱۸۳. ۱) اگر $x \geq ۰$، آن‌وقت $|x| = x$ و معادله به‌صورت $x - x = -۲$ یا $۰ = -۲$ درمی‌آید که ممکن نیست. یعنی برای x، جواب مثبت یا صفر وجود ندارد.

اگر $x < ۰$، آن‌وقت $|x| = -x$ و معادله به‌صورت

$x - (-x) = -۲$ یا $۲x = -۲$ یا $x = -۱$ درمی‌آید. معادله یک جواب دارد: $x = -۱$.

۲) وقتی $|x - ۱|$ برابر ۴ باشد، خود $x - ۱$ می‌تواند برابر ۴ و می‌تواند برابر -۴ باشد.

اگر $x - ۱ = ۴$، آن‌وقت $x = ۵$؛

اگر $x - ۱ = -۴$، آن‌وقت $x = -۳$.

معادله دو جواب دارد: ۵ و -۳.

۳) *پاسخ*. معادله دو جواب دارد: $x = ۱$ و $x = -۲$.

۴) در این معادله $x \neq ۳$ (مخرج، نمی‌تواند برابر صفر باشد). برای $x > ۳$ هم، معادله جواب ندارد، زیرا دراین حالت $|x - ۳| = x - ۳$ و کسر $\frac{x}{x - ۳}$ باید از ۱ بزرگتر باشد (وقتی $x > ۳$، آن‌وقت x و $x - ۳$ مقدارهایی مثبت‌اند و $x > x - ۳$).

پس $x < ۳$. دراین‌صورت $|x - ۳| = ۳ - x$ و

$$\frac{x}{۳ - x} = ۱ \Rightarrow x = ۳ - x \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

معادله تنها یک جواب دارد: $x = \frac{۳}{۲}$ ($\frac{۳}{۲}$، به‌این مناسبت قابل‌قبول است که از ۳ کوچکتر است و، دراین حالت، فرض ما براین بود که x کوچکتر از ۳ باشد).

۷. جمله و چندچندجمله‌ای

۱۸۴. *پاسخ*.

$$۱)\ -x + ۱; \quad ۲)\ -۳x^۲ + ۲x + ۱; \quad ۳)\ ۴x^۲ - ۶x;$$

۱۸۵. بهتر است، ابتدا پرانتز، بعد کروشه و سرانجام ابرو را برداشت:

$$۱)\ -۲n - \{-۵n - [-۸n - (۵ - ۳n)]\} =$$

$$= -۲n - \{-۵n - [-۸n - ۵ + ۳n]\} =$$
$$= -۲n - \{-۵n + ۸n + ۵ - ۳n\} =$$
$$= -۲n + ۵n - ۸n - ۵ + ۳n = -۲n - ۵;$$
$$۲)\ ۴a^۲b - \{ab^۲ - [-۵a^۲b - (۲ab^۲ - ۱)]\} =$$
$$= ۴a^۲b - \{ab^۲ - [-۵a^۲b - ۲ab^۲ + ۱]\} =$$
$$= ۴a^۲b - \{ab^۲ + ۵a^۲b + ۲ab^۲ - ۱\} =$$
$$= ۴a^۲b - ab^۲ - ۵a^۲b - ۲ab^۲ + ۱ = -a^۲b - ۳ab^۲ + ۱$$

۱۸۶. پاسخ. $a(x^۲ - ۱) - (x^۲ - ۱)$.

۱۸۷. داریم:

$$F = A - [B - ۲A - A + B] = A - [۲B - ۳A] =$$
$$= A - ۲B + ۳A = ۴A - ۲B$$

اکنون، به‌جای A و B، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$F = ۴(a^۲ + ۳ab + b^۲) - ۲(a^۲ + ۶ab - b^۲) =$$
$$= ۴a^۲ + ۱۲ab + ۴b^۲ - ۲a^۲ - ۱۲ab + ۲b^۲ =$$
$$= ۲a^۲ + ۶b^۲$$

۱۸۸. اگر یک عدد فرد را $۲k + ۱$ بنامیم $(k \in \mathbf{Z})$، عدد فرد پشت سرآن، برابر $۲k + ۳$ می‌شود، مجموع آن‌ها چنین است

$$(۲k + ۱) + (۲k + ۳) = ۴k + ۴$$

که بخش‌پذیر بودن آن بر ۴، روشن است.

۱۸۹. عدد دورقمی را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم. با جابه‌جا کردن رقم‌های آن به عدد $\overline{ba}$ می‌رسیم. دراین صورت داریم:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (۱۰a + b) + (۱۰b + a) = ۱۱a + ۱۱b$$

و این مجموع، به‌روشنی، بر ۱۱ بخش‌پذیر است؛ خارج‌قسمت برابر $a + b$، یعنی مجموع رقم‌های عدد دورقمی، می‌شود.

۱۹۰. $a - ۲a = -a$، یعنی باید دوبرابر عدد را، از خود عدد کم کنیم تا تفاضل برابر قرینهٔ عدد بشود.

۱۹۱. قرینه ۲−، برابر ۲ و عکس $-\frac{۱}{۲}$، برابر ۲− است و

$$۲ + (-۲) = ۰$$

۱۹۲. باید $a + b$ عددی منفی باشد تا $-(a + b)$ مثبت شود و این، وقتی پیش می‌آید که یا هردو عدد a و b منفی باشند، و یا از دو عدد a و b، آن که قدرمطلق بزرگتری دارد، منفی باشد. برای این‌که عدد $-(a + b)$، برابر صفر شود، باید a و b قرینهٔ یکدیگر باشند: $a = -b$.

۱۹۳. یادآوری می‌کنیم، اول باید عمل‌های داخل پرانتز را انجام داد، سپس عمل‌های ضرب یا تقسیم و، سرانجام، عمل‌های جمع و تفریق.

$$۱)\ (x^۲ - y^۲) : x - y = [(-۲)^۲ - ۵^۲] : (-۲) - ۵ =$$
$$= (۴ - ۲۵) : (-۲) - ۵ = (-۲۱) : (-۲) - ۵ =$$
$$= \frac{۲۱}{۲} - ۵ = ۱۰\frac{۱}{۲} - ۵ = ۵\frac{۱}{۲};$$

۲) $۱۱\frac{۱}{۲}$؛ ۳) $۷\frac{۴}{۷}$؛ ۴) ۳.

.۱۹۴

$$1)\ \frac{\frac{3}{4}+ab-b^2}{5a^3-ab}=\frac{\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})(-1)-(-1)^2}{5(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})(-1)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1}{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{9}{8}}=-\frac{2}{9};$$

۲) پاسخ. $-\left(3\frac{3}{32}\right)$؛ ۳) ۳/۱؛ ۴) $8\frac{1}{4}$؛ ۵) $-\frac{94}{5925}$؛

$$6)\ \frac{a^3}{a+1}+\frac{a^3}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=$$

$$=\frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{-\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{27}{4}+\frac{27}{20}-2+\frac{2}{5}=6\frac{1}{2}$$

۱۹۵. پاسخ‌ها. ۱) $8a^2+9b-c$؛ ۲) $-15a^4x^6y^5z$؛ ۳) $3xy^3z^3$؛ ۴) $2y$؛ ۵) $\frac{5y}{x^4}$؛ ۶) $-21a^3b^5c^4$؛ ۷) $-8xz$؛ ۸) a^5b^7؛ ۹) $12x^5y^3$.

۱۹۶. چون

$$x^2\cdot(x^2)^a\cdot x^a=x^2\cdot x^{2a}\cdot x^a=x^{3a+2}$$

پس باید داشته باشیم: $x^{3a+2}=x^{17}$، بنابراین $3a+2=17$ و $a=5$.

یادداشت. جواب $a = ۵$ به‌شرطی درست است که x، برابر صفر یا ۱ یا ۱− نباشد.

درحالت $x = ۰$ و $x = ۱$، مقدار a می‌تواند هر عدد دلخواه باشد (زیرا، عدد صفر را به هر توانی برسانیم، برابر صفر؛ و عدد ۱ را به هر توانی برسانیم، برابر ۱ می‌شود؛ البته، درحالت $x = ۰$، مقدار a نمی‌تواند برابر صفر باشد.

در حالت $x = -۱$، مقدار $x^{۱۷}$ برابر ۱− می‌شود؛ بنابراین باید مقدار $(-۱)^{۳a+۲}$ هم برابر ۱− شود و این، وقتی پیش می‌آید که $۳a + ۲$، عددی فرد باشد و چون، ۲ زوج است، باید $۳a$، یعنی a، عددی فرد باشد. درحالت $x = -۱$، مقدار a می‌تواند هر عدد فرد دلخواه باشد.

۱۹۷. ۱) ۱۳؛ ۲) ۱۳؛ ۳) $۱۳x^۳$؛ ۴) $۱۳y^۲z$؛ ۵) $۱۳x^۳y^۲$؛ ۶) $۱۳x^۳z$.

۱۹۸. عدد سه‌رقمی را $\overline{abc}$ و $a > c$ می‌گیریم. اگر رقم‌های این عدد را درجهت عکس بنویسیم، عدد سه‌رقمی $\overline{cba}$ به‌دست می‌آید و برای تفاضل آن‌ها داریم:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (۱۰۰a + ۱۰b + c) -$$
$$-(۱۰۰c + ۱۰b + a) = ۹۹(a - c)$$

بسته به این که مقدار $a - c$، کدام عدد یک‌رقمی باشد، برای این تفاضل، یعنی $۹۹(a - c)$، یکی از عددهای زیر به‌دست می‌آید:

$$۰, ۹۹, ۱۹۸, ۲۹۷, ۳۹۶, ۴۹۵, ۵۹۴, ۶۹۳, ۷۹۲, ۸۹۱$$

درنتیجه، اگر هریک از این عدها را با عدد مقلوب خود جمع کنیم (مقلوب یک عدد، یعنی عددی که با همان رقم‌های عدد اصلی و درجهت عکس

نوشته شده‌باشد)، یکی از این سه عدد به‌دست می‌آید:

$$۰, ۱۹۸, ۱۰۸۹$$

پاسخ. ۰ برای $a = c$؛ ۱۹۸ برای $a - c = ۱$؛ ۱۰۸۹ برای بقیهٔ حالت‌ها؛ درحالت $a < c$، مجموع موردنظر، برابر ۱۹۸− یا ۱۰۸۹− می‌شود.

۱۹۹. چهار رقم را a، b، c و d می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$a \geq b \geq c \geq d$$

درنتیجه، بزرگترین عدد چهاررقمی $\overline{abcd}$ و کوچکترین آن‌ها $\overline{dcba}$ می‌شود. بنابر فرض مساله داریم:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \quad + \\ \overline{dcba} \quad \\ \hline ۱۱۲۲۰ \quad \end{array}$$

بنابراین $d + a = ۱۰$ و $c + b = ۱۱$ (a و b و c و d، رقم‌اند و از ۱۰ کوچکتر). پس

$$a + b + c + d = ۲۱$$

۲۰۰. عددهای اول یک‌رقمی (که می‌توانند رقم‌های عدد ما باشند) عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵ و ۷. اگر نخستین رقم سمت چپ عدد، برابر ۲ باشد، چون باید این عدد بر ۲ بخش‌پذیر شود، به‌ناچار باید رقم سمت راست آن هم، برابر ۲ باشد. رقم میانی این عدد هم ۲ است، زیرا عدد ۲۳۲ بر ۳، ۲۵۲ بر ۵ و ۲۷۲ بر ۷ بخش‌پذیر نیستند. دراین حالت، عدد مجهول ۲۲۲ است.

به‌همین ترتیب، معلوم می‌شود که، اگر عدد سه‌رقمی با ۵ آغاز شود، باید برابر ۵۵۵ باشد.

اگر عدد مجهول، با ۳ آغاز شود، باید عدد دورقمی سمت راست آن، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، دو رقم سمت راست عدد یا ۵ و ۷ ویا هردو برابر ۳ هستند. آزمایش نشان می‌دهد که، تنها عدد ۳۳۳ با شرط‌های مساله سازگار است.

سرانجام، اگر عدد مجهول با ۷ آغاز شود، آن‌وقت دو رقم بعدی، باید عددی را بخش‌پذیر بر ۷ تشکیل دهند. دراین حالت، دو عدد ۷۷۷ و ۷۳۵ با شرط‌های مساله می‌سازند.

پاسخ. ۲۲۲، ۳۳۳، ۵۵۵، ۷۷۷، ۷۳۵.

۲۰۱. عدد مجهول را $\overline{۵۷۹abc}$ می‌گیریم. این عدد، باید بر ۵ و ۷ و ۹ و، درنتیجه، بر حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد (۵ و ۷ و ۹، دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند). داریم:

$$\overline{۵۷۹abc} = ۵۷۹۰۰۰ + \overline{abc} = ۱۸۳۸ \times ۳۱۵ +$$
$$+۳۰ + \overline{abc}$$

پس عدد $\overline{abc} + ۳۰$، باید برابر ۳۱۵ یا برابر ۳۱۵×۲ ، یعنی ۶۳۰ و یا برابر ۳۱۵×۳، یعنی ۹۴۵ باشد.

پاسخ. عدد $\overline{abc}$، برابر است با یکی از عددها ۲۸۵، ۶۰۰ یا ۹۱۵.

۲۰۲. کسرهای بزرگتر از a و کوچکتر از $a + ۱$ عبارتند از

$$a + \frac{۱}{p}, a + \frac{۲}{p}, a + \frac{۳}{p}, \ldots, a + \frac{p - ۱}{p}$$

یعنی روی‌هم، $(p - ۱)$ کسر. همچنین $(p - ۱)$ کسر، بین عددهای $a + ۱$ و $a + ۲$ واقع‌اند:

$$a + ۱ + \frac{۱}{p}, a + ۱ + \frac{۲}{p}, \ldots, a + ۱ + \frac{p - ۱}{p}$$

به‌همین ترتیب، بین $a+۲$ و $a+۳$ یا بین $a+۳$ و $a+۴$ و غیره، $(p-۱)$ کسر وجود دارد. سرانجام، $(p-۱)$ کسر بین $(b-۱)$ و b، چنین‌اند:

$$b-۱+\frac{۱}{p}, b-۱+\frac{۲}{p}, \dots, b-۱+\frac{p-۱}{p}$$

روشن است که، تعداد کل این ردیف‌های $(p-۱)$ کسری، برابر است با $b-a$. بنابراین، مجموع همهٔ آن‌ها، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{۱}{p}+\frac{۲}{p}+\dots+\frac{p-۱}{p}\right)(b-a)+$$
$$+(p-۱)[a+(a+۱)+\dots+(b-۱)]=$$
$$=\frac{p(p-۱)}{۲p}(b-a)+(p-۱)\frac{(a+b-۱)(b-a)}{۲}=$$
$$=\frac{p-۱}{۲}(b^{۲}-a^{۲}) \qquad (*)$$

توجه کنید، برای محاسبه مجموع عددهای پشت‌سرهم از ۱ تا $p-۱$، می‌توان آن‌ها را دوبار و در دو ردیف متفاوت زیرهم نوشت:

$$A=۱+۲+\dots+(p-۲)+(p-۱)$$
$$A=(p-۱)+(p-۲)+\dots+۲+۱$$

و سپس، دو ردیف را باهم جمع کرد:

$$۲A=p+p+\dots+p+p=(p-۱)p$$

پس $A=\frac{p(p-۱)}{۲}$.

از همین روش، می‌توان برای مجموع

$$a+(a+۱)+(a+۲)+\dots+(b-۱)$$

هم استفاده کرد

مثلاً، مجموع همهٔ کسرهای ساده‌نشدنی به مخرج ۱۳، که بین دو عدد ۲ و ۷ واقع‌اند، طبق دستور (*) برابر است با

$$\frac{p-۱}{۲}(b^۲-a^۲)=\frac{۱۳-۱}{۲}(۷^۲-۲^۲)=۲۷۰$$

اگر p، مخالف ۲ (که تنها عدد اول زوج است) باشد، $p-۱$ عددی زوج و $\frac{p-۱}{۲}$، عدی درست می‌شود؛ دراین‌صورت، به‌جز برای حالت $p=۲$، مجموع این‌گونه کسرها، همیشه عددی درست است.

۲۰۳. سمت راست برابری، یعنی

$$(\overline{xx})^۲+(\overline{yy})^۲=(۱۰x+x)^۲+(۱۰y+y)^۲=$$
$$=(۱۱x)^۲+(۱۱y)^۲=۱۲۱(x^۲+y^۲)$$

بر ۱۲۱ بخش‌پذیر است. پس باید مقدار سمت چپ برابری، یعنی

$$\overline{xxyy}=۱۰۰۰x+۱۰۰x+۱۰y+y=۱۱۰۰x+۱۱y=$$
$$=۱۱(۱۰۰x+y)=۱۱[۹۹x+(x+y)]$$

بر ۱۲۱، یا مقدار داخل کروشه بر ۱۱ ویا $x+y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. چون x و y، رقم و از ۱۰ کوچکترند، پس باید داشته‌باشیم:

$$x+y=۱۱$$

و درنتیجه، برابری ما، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۹x+۱=x^۲+y^۲$$

آزمایش نشان می‌دهد که تنها یک جفت رقم در این برابری، صدق می‌کند: $x = 8$، $y = 3$ و درواقع هم

$$8833 = 88^2 + 33^2$$

۸. ضرب و تقسیم، در چندجمله‌ای‌ها

۲۰۴. تنها پاسخ‌ها را داده‌ایم.

$$1)\ x^6 - 4x^4 + 4x^3 - 13x^2 + 6x - 9;$$

$$2)\ a^5 - b^5; \quad 3)\ x^4y^4 - t^4;$$

$$4)\ a^3 + b^3 + 3ab - 1; \quad 5)\ a^7 - b^7$$

$$6)\ x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

۲۰۵. پاسخ‌ها، به دو صورت داده شده‌است:

$$1)\ \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = 2x - 3,$$

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3);$$

$$2)\ 36a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - b^3;$$

$$3)\ 4x^3 - 2x^2 + x,$$

$$28x^7 + 6x^6 - 15x^5 + 11x^4 - 3x^2 =$$

$$= (7x^4 + 5x^3 - 3x^2)(4x^3 - 2x^2 + x);$$

$$4)\ \frac{3}{4}x^4 + 8x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x,$$

$$9x^6 + 99x^5 + 26x^4 + 34x^3 + 12x^2 =$$

$$= (12x^2 + 4x)\left(\frac{3}{4}x^4 + 8x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)$$

$$۵)\ a^{۵}+a^{۴}b+a^{۳}b^{۲}+a^{۲}b^{۳}+ab^{۴}+b^{۵},$$

$$a^{۶}-b^{۶}=(a-b)(a^{۵}+a^{۴}b+a^{۳}b^{۲}+a^{۲}b^{۳}+ab^{۴}+b^{۵});$$

$$۶)\ a^{۶}-a^{۵}b+a^{۴}b^{۲}-a^{۳}b^{۳}+a^{۲}b^{۴}-ab^{۵}+b^{۶},a^{۷}+b^{۷}=$$

$$=(a+b)(a^{۶}-a^{۵}b+a^{۴}b^{۲}-a^{۳}b^{۳}+a^{۲}b^{۴}-ab^{۵}+b^{۶});$$

$$۷)\ x^{۴}-x^{۲}y^{۲}+y^{۴},x^{۶}+y^{۶}=(x^{۲}+y^{۲})(x^{۴}-x^{۲}y^{۲}+y^{۴});$$

$$۸)\ x^{۵}-x^{۴}y+x^{۳}y^{۲}-x^{۲}y^{۳}+xy^{۴}-y^{۵}+\frac{۲y^{۶}}{x+y},$$

$$x^{۶}+y^{۶}=(x+y)(x^{۵}-x^{۴}y+x^{۳}y^{۲}-x^{۲}y^{۳}+$$
$$+xy^{۴}-y^{۵})+۲y^{۶}$$

۲۰۶. $۳a-b$ و $۳a+b$ نسبت به‌هم اول‌اند (بخشیاب مشترکی، جز واحد، ندارند). پس مخرج مشترک دو کسر، حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی $۹a^{۲}-b^{۲}$ می‌شود و داریم:

$$\frac{۲a-b}{۳a-b}+\frac{۵b-a}{۳a+b}=\frac{(۲a-b)(۳a+b)+(۵b-a)(۳a-b)}{۹a^{۲}-b^{۲}}=$$

$$=\frac{۳a^{۲}+۱۵ab-۶b^{۲}}{۹a^{۲}-b^{۲}}$$

بنابر فرض داریم: $۵ab=۳b^{۲}-۱۰a^{۲}$؛ در صورت کسر حاصل، به‌جای $۱۵ab$، مقدار آن، یعنی $۳(۳b^{۲}-۱۰a^{۲})$، قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳a^{۲}+۳(۳b^{۲}-۱۰a^{۲})-۶b^{۲}}{۹a^{۲}-b^{۲}}=\frac{-۳(۹a^{۲}-b^{۲})}{۹a^{۲}-b^{۲}}=-۳$$

صورت و مخرج کسر را توانستیم بر $۹a^{۲}-b^{۲}$ بخش کنیم، زیرا بنابر فرض، مقدار $۹a^{۲}-b^{۲}$ مخالف صفر است.

۲۰۷. مقدار کسر را (که باید عددی درست باشد) برابر u می‌گیریم و دوطرف برابری را در y ضرب می‌کنیم (تا کسری به‌دست آید که بتوان، درآن، صورت را بر مخرج تقسیم کرد)، به‌دست می‌آید:

$$uy = \frac{yx^۲ + yx + y}{xy - ۱} = x + ۱ + \frac{x + y + ۱}{xy - ۱}$$

چون uy، عدد درستی است، پس باید حاصل کسر $\frac{x + y + ۱}{xy - ۱}$، برابر با عددی درست باشد. و این، به‌معنای آن است که، صورت کسر، نمی‌تواند از مخرج آن، کوچکتر باشد:

$$x + y + ۱ \geq xy - ۱ \Rightarrow (y - ۱)x \leq y + ۲$$

اگر $y = ۱$ آن‌وقت

$$u = \frac{x^۲ + x + ۱}{x - ۱} = x + ۲ + \frac{۳}{x - ۱}$$

از این‌جا روشن است که، برای درست بودن عدد u، باید ۳ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و این، وقتی ممکن است که $x - ۱$، برابر ۱ یا ۳ شود:

$$x - ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۲; \quad x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۴$$

و در هردو حالت (یعنی به‌ازای $x = ۲$ و $x = ۴$)، به‌دست می‌آید: $u = ۷$.

اگر $y - ۱ > ۰$، آن‌وقت در نابرابری $(y - ۱)x \leq y + ۲$، می‌توان دوطرف را بر $y - ۱$ بخش کرد:

$$x \leq \frac{y + ۲}{y - ۱} = ۱ + \frac{۳}{y - ۱}$$

عدد حاصل از کسر $\frac{۳}{y-۱}$ نمی‌تواند از ۳ بزرگتر باشد (چون y، عددی است طبیعی) پس حاصل این کسر می‌تواند برابر ۳ یا ۱ باشد). پس $x \leq ۴$. یعنی x می‌تواند برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. درهرحالت u را پیدا می‌کنیم:

$$x = ۱ \Rightarrow u = \frac{۳}{y - ۱};$$

$$x = ۲ \Rightarrow u = \frac{۷}{۲y - ۱};$$

$$x = ۳ \Rightarrow u = \frac{۱۳}{۳y - ۱}$$

$$x = ۴ \Rightarrow u = \frac{۲۱}{۴y - ۱}$$

در حالت اول، y می‌تواند برابر ۲ یا ۴ و درنتیجه u برابر ۳ یا ۱ باشد؛ در حالت دوم، y برابر ۱ یا ۴ و u برابر ۷ یا ۱ می‌شود؛

درحالت سوم، برای y، عددی طبیعی به‌دست نمی‌آید؛

درحالت چهارم، y برابر ۱ یا ۲ و u برابر ۷ یا ۳ می‌تواند باشد.

به‌این ترتیب، کسر مفروض، برای عددهای طبیعی x و y می‌تواند برابر یکی از عددهای ۷ (به‌ازای $x = ۲$، $y = ۱$ یا $x = ۴$، $y = ۱$)، ۳ (به‌ازای $x = ۱$، $y = ۲$ یا $x = ۴$، $y = ۲$) یا ۱ (به‌ازای $x = ۱$، $y = ۴$ یا $x = ۲$، $y = ۴$) باشد.

۲۰۸. بنابر فرض مساله داریم: $x + y = -(z + t)$. اگر دوطرف این برابری را به‌توان ۳ برسانیم، به‌ترتیب داریم:

$$(x + y)^۳ = -(z + t)^۳;$$

$$x^۳ + y^۳ + ۳xy(x + y) = -z^۳ - t^۳ - ۳zt(z + t);$$

$$x^۳ + y^۳ - ۳xy(z + t) = -z^۳ - t^۳ - ۳zt(z + t);$$

(درسمت چپ برابری، به‌جای $x+y$، مقدارش $-(z+t)$ را قرار دادیم).
اکنون با جابه‌جایی جمله‌ها، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x^۳+y^۳+z^۳+t^۳=۳(xy-zt)(z-t)$$

۲۰۹. اگر $a=\frac{۱}{۱۱۷}$ و $b=\frac{۱}{۱۱۹}$ فرض کنیم، آن‌وقت

$$P=۳\frac{۱}{۱۱۷}\times ۴\frac{۱}{۱۱۹}-۱\frac{۱۱۶}{۱۱۷}\times ۵\frac{۱۱۸}{۱۱۹}-\frac{۵}{۱۱۹}=$$
$$=(۳+a)(۴+b)-(۲-a)(۶-b)-۵b=$$
$$=(۱۲+۳b+۴a+ab)-(۱۲-۲b-۶a+ab)-$$
$$-۵b=۱۰a=\frac{۱۰}{۱۱۷}$$

۲۱۰. برای سادگی کار، عدد ۷۱ را با a نشان می‌دهیم، دراین صورت، خواهیم داشت:

$$M=(a-۱)(a^۹+a^۸+\ldots+a^۲+a+۲)+۱=$$
$$=(a^{۱۰}+a^۹+\ldots+a)-$$
$$-(a^۹+a^۸+\ldots+a^۲+a+۱)+۱=a^{۱۰}$$

بنابراین به‌دست می‌آید: $M=۷۱^{۱۰}$.

۲۱۱. اگر حاصل‌ضرب $x^۲+۲xy+۲y^۲$ و $x^۲-۲xy+۲y^۲$، بر ۵ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت، دست‌کم مقدار عددی یکی از آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر خواهدبود. این حاصل‌ضرب را پیدا می‌کنیم:

$$(x^۲+۲xy+۲y^۲)(x^۲-۲xy+۲y^۲)=x^۴+۴y^۴$$

باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عد طبیعی x یا y بر ۵، یکی از این ۵ عدد می‌تواند باشد:

$$۰,\pm۱,\pm۲$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد طبیعی $x^۲$ یا $y^۲$ بر ۵، برابر است با

$$۱ \pm \text{ یا } ۰$$

(مجذور $۱\pm$، برابر $۱+$ و مجذور $۲\pm$ برابر ۴ می‌شود.ولی در تقسیم بر ۵، باقی‌ماندهٔ ۴، همان باقی‌ماندهٔ $۱-$ است).

پس، از تقسیم $x^۴$ بر ۵ به یکی از دو باقی‌ماندهٔ

$$۱ \text{ یا } ۰$$

و از تقسیم $۴y^۴$ بر ۵، به یکی از ده باقی‌ماندهٔ

$$۴ \text{ یا } ۰$$

می‌رسیم. دنبالهٔ بحث روشن است:

x و y نمی‌توانند یکی بر ۵ بخش‌پذیر و دیگری بر ۵ بخش‌ناپذیر باشد (زیرا، دراین‌صورت، از تقسیم $x^۴ + ۴y^۴$ بر ۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ یا ۱ به‌دست می‌آید).

برای این‌که $x^۴ + ۴y^۴$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باید یا هردو عدد x و y بر ۵ بخش‌پذیر باشند ویا هیچ‌کدام از آن‌ها، بر ۵ بخش‌پذیر نباشند.

.۲۱۲

$$۱)\ (۵a - ۳b)^۲ = (۵a)^۲ - ۲(۵a)\cdot(۳b) + (۳b)^۲ =$$
$$= ۲۵a^۲ - ۳۰ab + ۹b^۲,$$
$$۲)\ \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y}\right)^۲ = \left(\frac{xy}{z}\right)^۲ - ۲\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{xz}{y}\right) + \left(\frac{xz}{y}\right)^۲ =$$
$$= \frac{x^۲y^۲}{z^۲} - ۲x^۲ + \frac{x^۲z^۲}{y^۲};$$

۳) $\left(\frac{a+b}{۲}+\frac{c-d}{۳}\right)^۲=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲+۲\left(\frac{a+b}{۲}\right)\left(\frac{c-d}{۳}\right)+$

$+\left(\frac{c-d}{۳}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(a^۲+۲ab+b^۲)+\frac{۱}{۳}(a+b)(c-d)+$

$+\frac{۱}{۹}(c^۲-۲cd+d^۲);$

۴) $(۲t-۱)^۳=(۲t)^۳-۳(۲t)^۲+۳(۲t)-۱=$

$=۸t^۳-۱۲t^۲+۶t-۱;$

۵) $(۳t+۲)^۳=۲۷t^۳+۵۴t^۲+۳۶t+۸;$

۶) $(x^۲+y^۳)^۳=x^۶+۳x^۴y^۳+۳x^۲y^۶+y^۹;$

۷) $(۲p+۳q)(۲p-۳q)=۴p^۲-۹q^۲;$

۸) $(x^۲+xy+y^۲)(x^۲-xy+y^۲)=$

$[(x^۲+y^۲)+xy][(x^۲+y^۲)-xy]=(x^۲+y^۲)^۲-(xy)^۲=$

$=x^۴+۲x^۲y^۲+y^۴-x^۲y^۲=x^۴+x^۲y^۲+y^۴;$

۹) $(۲a-۳b+c)(۲a+۳b-c)=$

$=[۲a-(۳b-c)][۲a+(۳b-c)]=$

$=(۲a)^۲-(۳b-c)^۲=۴a^۲-۹b^۲-c^۲+۶bc;$

۱۰) $(x-۵)(x+۲)=x^۲+(-۵+۲)x+(-۵)\times ۲=$

$=x^۲-۳x-۱۰;$

۱۱) $(a+۷)(a-۳)=a^۲+۴a-۲۱;$

۱۲) $(۴x+۱۱)(۴x-۹)=۱۶x^۲+۸x-۹۹;$

۱۳) $(xy+۲a)(xy-۳a)=x^۲y^۲-axy-۶a^۲;$

۱۴) $(x+۲a-۳)(x-a+۴)=x^۲+[(۲a-۳)+(-a+۴)]x\cdot$

$$+(۲a-۳)(-a+۴)=x^۲+(a+۱)x-(۲a-۳)(a-۴)$$

.۲۱۳

$$۱)\ ۵۲^۲=(۵۰+۲)^۲=۲۵۰۰+۲۰۰+۴=۲۷۰۴;$$
$$۲)\ ۳۳\times ۲۷=(۳۰+۳)(۳۰-۳)=۹۰۰-۹=۸۹۱;$$
$$۳)\ ۵۹^۲=(۶۰=۱)^۲=۳۶۰۰-۱۲۰+۱=۳۴۸۱;$$
$$۴)\ ۷۱\times ۷۲=(۷۰+۱)(۷۰+۲)=۷۰^۲+(۱+۲)۷۰+۱\times ۲=$$
$$=۴۹۰۰+۲۱۰+۲=۵۱۱۲;$$
$$۵)\ ۸۳\times ۷۸=(۸۰+۳)(۸۰-۲)=$$
$$=۸۰^۲+(۳-۲)۸۰+۳\times(-۲)=۶۴۰۰+۸۰-۶=۶۴۷۴$$
$$۶)\ ۱۰۴\times ۹۶=(۱۰۰+۴)(۱۰۰-۴)=$$
$$=۱۰۰^۲-۴^۲=۱۰۰۰۰-۱۶=۹۹۸۴$$

۲۱۴. عدد دورقمی را $\overline{a۵}$ فرض می‌کنیم. برای مجذور آن داریم:

$$(\overline{a۵})^۲=(۱۰a+۵)^۲=۱۰۰a^۲+۱۰۰a+۲۵=$$
$$=۱۰۰a(a+۱)+۲۵$$

یعنی، باید عدد ۲۵ را نوشت و در سمت چپ آن، حاصل‌ضرب $a(a+۱)$ را قرار داد. مثلاً

$$۳۵^۲=۱۰۰\times ۳\times ۴+۲۵=۱۲۲۵;$$
$$۸۵^۲=۷۲۲۵;\quad ۱۰۵^۲=۱۱۰۲۵۱$$

۲۱۵. در متن درس این فصل دیدیم که، اگر طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه را a و b و طول وتر مثلث را c بگیریم، بافرض $m > n$ (m و

n، عددهایی طبیعی‌اند)، داریم:

$$a = m^۲ - n^۲, b = ۲mn, c = m^۲ + n^۲$$

اگر عدد اول ۲ را کنار بگذاریم (۲، تنها عدد اول زوج است)، طول ضلع برابر a، می‌تواند برابر هر عدد اول باشد. فرض کنیم بخواهیم a برابر عدد اول p باشد:

$$m^۲ - n^۲ = p \Rightarrow (m-n)(m+n) = ۱ \times p$$

برای این‌که m و n، عددهای طبیعی باشند، باید داشته‌باشیم:

$$m - n = ۱ \text{ و } m + n = p$$

از مجموع و تفاضل این دو برابری، به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{p+۱}{۲} \text{ و } n = \frac{p-۱}{۲}$$

توجه کنید: چون p عددی فرد است، $p+۱$ و $p-۱$ عددهایی زوج و، بنابراین، $\frac{p+۱}{۲}$ و $\frac{p-۱}{۲}$، عددهایی طبیعی‌اند.

مثلاً، برای این‌که یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه برابر ۱۹ باشد، باید داشته باشیم $m = ۱۰$ و $n = ۹$ که دراین‌صورت

$$a = ۱۹, b = ۱۸۰, c = ۱۸۱$$

که درآن، درضمن، طول وتر، یعنی ۱۸۱ هم، عددی اول است.

در این‌جا طول ضلع‌های چند مثلث فیثاغوری داده‌شده که، در آن، مقدار

a، عددی اول است:

$$a = ۳, \quad b = ۴, \quad c = ۵;$$
$$a = ۵, \quad b = ۱۲, \quad c = ۱۳;$$
$$a = ۷, \quad b = ۲۴, \quad c = ۲۵;$$
$$a = ۱۱, \quad b = ۶۰ \quad c = ۶۱;$$
$$a = ۱۳, \quad b = ۸۴, \quad c = ۸۵$$
$$a = ۱۷, \quad b = ۱۴۴, \quad c = ۱۴۵;$$

در همین‌جا دیدید که، در بسیاری موردها، طول وتر هم، عددی اول است. ولی هر عدد اولی، نمی‌تواند طول وتر مثلث فیثاغوری باشد. طول وتر برابر $m^۲ + n^۲$ است. بنابراین، اگر یک عدد اول را نتوان به‌صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشت، این عدد نمی‌تواند طول وتر مثلث فیثاغوری باشد.

عددهای اول ۷، ۱۱، ۱۹ و ۲۳ ازاین قبیل‌اند. ولی عدد ۲۹ را می‌توان به‌صورت ۴ + ۲۵ یعنی $۵^۲ + ۲^۲$ نوشت، یعنی $m = ۵$ و $n = ۲$ و

$$a = ۲۱, b = ۲۰, c = ۲۹$$

۲۱۶. از فرض $a^۲ + a + ۱ = ۰$ نتیجه می‌شود (به‌شرط $a \neq ۱$):

$$a + \frac{۱}{a} = -۱, a^۳ = ۱$$

(با تقسیم دوطرف برابری فرض بر a، رابطهٔ اول؛ و با ضرب دوطرف برابری فرض در $a - ۱$، رابطهٔ دوم به‌دست می‌آید.)

ازطرف دیگر، داریم:

$$۱۳۷۳ = ۳ \times ۴۵۷ + ۲$$

یعنی

$$a^{۱۳۷۳} = (a^۳)^{۴۵۷} \cdot a^۲ = ۱ \times a^۲ = a^۲$$

بنابراین، به‌ترتیب، داریم

$$a^{۱۳۷۳} + \frac{۱}{a^{۱۳۷۳}} = a^{۲} + \frac{۱}{a^{۲}} =$$
$$= \left(a + \frac{۱}{a}\right)^{۲} - ۲ = (-۱)^{۲} - ۲ = -۱$$

شرط $a \neq ۱$ همیشه برقرار است، زیرا به‌ازای $a = ۱$ مقدار عبارت $a^{۲} + a + ۱$ برابر صفر نمی‌شود.

به‌این‌ترتیب، بافرض $a^{۲} + a + ۱ = ۰$ داریم:

$$a^{۱۳۷۳} + \frac{۱}{a^{۱۳۷۳}} = -۱$$

۲۱۷. اگر عدد x بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشد، باید به‌صورت $۶k \pm ۱$ $(k \in \mathrm{N})$ باشد، از آن‌جا

$$x^{۲} = ۳۶k^{۲} \pm ۱۲k + ۱;$$
$$x^{۲} - ۱ = ۱۲(۳k^{۲} \pm k)$$

ولی $۳k^{۲} \pm k = ۲k^{۲} + k(k \pm ۱)$، عددی زوج و بر ۲ بخش‌پذیر است، زیرا $۲k^{۲}$ عددی زوج و $k(k \pm ۱)$، یعنی حاصل‌ضرب دو عدد پشت‌سرهم، عددی زوج است؛ پس $x^{۲} - ۱$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است:

$$x^{۲} - ۱ = ۲۴n \quad (n \in \mathrm{N})$$

اگر عدد طبیعی y بر ۲ و ۳ بخش‌ناپذیر باشد:

$$y^{۲} - ۱ = ۲۴m \quad (m \in \mathrm{N})$$

وقتی دو عدد $x^۲ - ۱$ و $y^۲ - ۱$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشند، تفاضل آن‌ها، یعنی

$$(x^۲ - ۱) - (y^۲ - ۱) = x^۲ - y^۲$$

بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲۱۸. اگر پرانتزها را باز کنیم، به‌دست می‌آید:

$$N = n^۲ + (n+۱)^۲ + (n+۲)^۲ + (n+۳)^۲ =$$
$$= ۲(۲n^۲ + ۶n + ۷)$$

برای این‌که N بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید $۲n^۲ + ۶n + ۷$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$۲n^۲ + ۶n + ۷ = ۵k, k \in \mathbf{N}$$

$۵k$ را به‌سمت چپ برابری می‌بریم و آن را، به‌این صورت، به‌ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$۲n^۲ + ۶n + ۷ - ۵k = ۲\left(n^۲ + ۳n + \frac{۷ - ۵k}{۲}\right) =$$
$$= ۲\left[\left(n + \frac{۳}{۲}\right)^۲ - \frac{۹}{۴} + \frac{۷ - ۵k}{۲}\right] =$$
$$= ۲\left[\frac{(۲n+۳)^۲}{۴} - \frac{-۵ + ۱۰k}{۴}\right] = ۰$$

که از آن‌جا، باید داشته‌باشیم:

$$(۲n + ۳)^۲ = ۵(۲k - ۱)$$

$۲n+۳$، عددی فرد است، پس باید $۵(۲k-۱)$ هم مجذور عددی فرد باشد تا برای n، عدی طبیعی به‌دست آید. یعنی باید داشته‌باشیم:

$$۲k-۱=۵(۲t+۱), t\in \mathbf{N}$$

دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$(۲n+۳)^۲=۲۵(۲t+۱)^۲;$$
$$۲n+۳=۵(۲t+۱)=۱۰t+۵;$$
$$۲n=۱۰t+۲ \text{ و } n=۵t+۱, t\in \mathbf{N}$$

به‌این ترتیب، برای این‌که N بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید عدد طبیعی n، به‌صورت $۵t+۱$ باشد که، درآن، t، عددی طبیعی و دلخواه و یا صفر است. مثلاً

$$n=۱\Rightarrow N=۳۰;$$
$$n=۶\Rightarrow N=۲۳۰;$$
$$n=۱۱\Rightarrow N=۶۳۰;$$

راه‌حل دوم. توجه می‌کنیم که

$$n^۲+(n+۱)^۲+(n+۲)^۲+(n+۳)^۲=(۲n+۳)^۲+۵$$

بنابراین، برای بخش‌پذیر بودن این عدد بر ۵، باید n چنان باشد که عدد $۲n+۳$ به ۵ ختم شود؛ یعنی

$$۲n+۳=۱۰t+۵\Rightarrow n=۵t+۱$$

راه‌حل سوم. اگر آخرین رقم مجذورهای عددهای طبیعی پشت‌سرهم را درنظر بگیریم:

$$۱, ۴, ۹, ۶, ۹, ۴, ۱$$

می‌بینیم تنها به دو طریق می‌توان چهار عدد پشت‌سرهم را، در این‌جا انتخاب کرد، به‌نحوی که مجموع آن‌ها برابر مضرب ۱۰ شود:

$$۱ + ۴ + ۹ + ۶ = ۶ + ۹ + ۴ + ۱ = ۲۰$$

بنابراین، رقم آخر عدد n، باید برابر ۱ یا ۶، یعنی خود عدد nو به‌صورت $۵t + ۱$ باشد.

۲۱۹. باتوجه به این‌که

$$۱۰۱^۲ - ۱۰۰^۲ = (۱۰۱ - ۱۰۰)(۱۰۱ + ۱۰۰) = ۲۰۱;$$
$$۹۹^۲ - ۹۸^۲ = (۹۹ - ۹۸)(۹۹ + ۹۸) = ۱۹۷;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$۳^۲ - ۲^۲ = (۳ - ۲)(۲ + ۲) = ۵$$

به‌ترتیب داریم:

$$A = ۱ - ۲^۲ + ۳^۲ - \dots + ۹۹^۲ - ۱۰۰^۲ + ۱۰۱^۲ =$$
$$= ۱ + (۱۰۱^۲ - ۱۰۰^۲) + (۹۹^۲ - ۹۸^۲) + \dots + (۳^۲ - ۲^۲) =$$
$$= ۲۰۱ + ۱۹۷ + \dots + ۹ + ۵ + ۱$$

مقدار A را دوبار زیرهم می‌نویسیم (در دو جهت مختلف) و سپس، جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{lllllll} A = & ۲۰۱+ & ۱۹۷+ & ۱۹۳+ & \dots+ & ۹+ & ۵+ & ۱ \\ A = & ۱+ & ۵+ & ۹+ & \dots+ & ۱۹۳+ & ۱۹۷+ & ۲۰۱ \\ \hline A = & ۲۰۲+ & ۲۰۲+ & ۲۰۲+ & \dots+ & ۲۰۲+ & ۲۰۲+ & ۲۰۲ \end{array}$$

در A، بدون عدد ۱، ۱۰۰ جمله و، بنابراین، در دو عبارت بالا برای A، و همچنین، در مجموع آن، یعنی $2A$، ۵۱ جمله وجود دارد، پس

$$2A = 51 \times 202 \Rightarrow A = 5151$$

۲۲۰. عدد مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$B = 9(10^{3n-1} + 10^{3n-2} + \ldots + 10^{2n+1}) +$$
$$+7 \times 10^{2n} + 2 \times 10^{n} + 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1)$$

ازطرف دیگر، داریم:

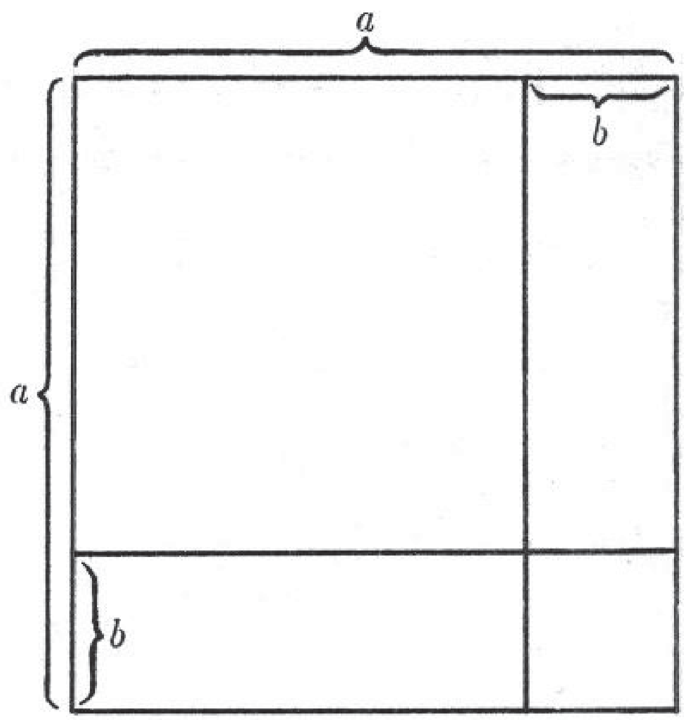
$$9(10^{3n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) = 10(10^{3n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) -$$
$$-(10^{3n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) = 10^{3n} - 10^{2n+1};$$
$$9(10^{n-1} + \ldots + 1) = 10(10^{n-1} + \ldots + 1) -$$
$$-(10^{n-1} + \ldots + 1) = 10^{n} - 1$$

بنابراین

$$B = 10^{3n} - 10^{2n+1} + 7 \times 10^{2n} + 3 \times 10^{n} - 1 =$$
$$(10^{n})^{3} - 3(10^{n})^{2} + 3(10^{n}) - 1 = (10^{n} - 1)^{3} =$$
$$= \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ بار}}{}^{3}$$

۲۲۱. همه‌چیز روی شکل ۳۹ روشن است.

یادداشت. وقتی درستی یک اتحاد جبری، به‌یاری هندسه، ثابت می‌شود، به‌معنای آن است که همهٔ حرف‌های داخل اتحاد را، عددهای مثبت فرض کرده‌ایم و، بنابراین، اثبات هندسی، یک اثبات کلی نیست و درستی اتحاد را، تنها برای عددهای مثبت اثبات می‌کند.



شکل ۳۹

۲۴۲. $\sqrt{y}$ را به‌سمت راست برابری می‌بریم و، بعد، دوطرف برابری را به توان ۲ می‌رسانیم، به‌دست می‌آید:

$$x = ۱۳۷۴^۲ - ۲ \times ۱۳۷۴\sqrt{y} + y$$

سمت چپ این برابری، عددی طبیعی است، بنابراین سمت راست آن هم، باید عددی طبیعی باشد و این، ممکن نیست مگر این‌که $\sqrt{y}$ عددی گویا، یعنی y، مجذور یک عدد طبیعی باشد.

به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که x هم باید مجذور کامل باشد. به‌عنوان نمونه، اگر $x = ۷۸۳^۲$ و $y = ۵۹۱^۲$، آن‌وقت

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{۷۸۳^۲} + \sqrt{۵۹۱^۲} =$$
$$= ۷۸۳ + ۵۹۱ = ۱۳۷۴$$

به چند طریق ممکن است، مجموع دو عدد طبیعی، برابر ۱۳۷۴ شود.

$$۱ + ۱۳۷۳; ۲ + ۱۳۷۲; \ldots; ۱۳۷۲ + ۲; ۱۳۷۳ + ۱$$

می‌بینیم که ۱۳۷۳ بار، معادله، ۱۳۷۳ زوج جواب طبیعی دارد.

۲۲۳. در B، ۹۵ جمله وجود دارد که، اگر به‌ترتیب و از دوطرف، جمله‌ها را باهم جفت کنیم، جملهٔ $۴۸^۳$ باقی می‌ماند که جفتی ندارد:

$$A = (۱^۳ + ۹۵^۳) + (۲^۳ + ۹۴^۳) + (۳^۳ + ۹۳^۳) + \dots$$
$$\dots + (۴۶^۳ + ۵۰^۳) + (۴۷^۳ + ۴۹^۳) + ۴۸^۳$$

روشن است که $۴۸^۳$ بر ۹۶ بخش‌پذیر است، زیرا

$$۴۸^۳ = (۲^۴ \times ۳)^۳ = ۲^{۱۲} \times ۳^۳ =$$
$$= (۲^۵ \times ۳)(۲^۷ \times ۳^۲) = ۹۶(۲^۷ \times ۳^۲)$$

هریک از پرانتزها هم بر ۹۶ بخش‌پذیر است:

$$۱^۳ + ۹۵^۳ = (۱ + ۹۵)(۱^۲ - ۱ \times ۹۵ + ۹۵^۲) = ۹۶N_۱$$
$$۲^۳ + ۹۴^۳ = (۲ + ۹۴)(۲^۲ - ۲ \times ۹۴ + ۹۴^۲) = ۹۶N_۲;$$

....

$$۴۷^۳ + ۴۹^۳ = (۴۷ + ۴۹)(۴۷^۲ - ۴۷ \times ۴۹ + ۴۹^۲) = ۹۶N_۳$$

بنابراین، مجموع آن‌ها، یعنی B، بر ۹۶ بخش‌پذیر است.

برای اثبات بخش‌پذیر بودن عدد بر ۱۰۰، می‌نویسیم:

$$B = (۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳) + (۵^۳ + ۹۵^۳) + (۶^۳ + ۹۴^۳) +$$
$$+ \dots + (۴۹^۳ + ۵۱^۳) + ۵۰^۳$$

ازطرف دیگر:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱ + ۸ + ۲۷ + ۶۴ = ۱۰۰;$$
$$۵۰^۳ = ۵۰ \times ۵۰ \times ۵۰ = ۱۰۰(۲۵ \times ۵۰)$$

هر پرانتز هم بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است، زیرا مثلاً

$$۵^۳ + ۹۵^۳ = (۵ + ۹۵)(۵^۲ - ۵ \times ۹۵ + ۹۵^۲) = ۱۰۰p$$

بنابراین عدد B بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد B بر ۹۷ می‌نویسیم:

$$B = ۱ + (۲^۳ + ۹۵^۳) + (۳^۳ + ۹۴^۳) + \ldots + (۴۸^۳ + ۴۹^۳)$$

هر پرانتز بر ۹۷ بخش‌پذیر است (چرا؟). بنابراین، در تقسیم عدد B بر ۹۷، باقی‌مانده‌ای برابر واحد به‌دست می‌آید:

$$B = ۹۷N + ۱$$

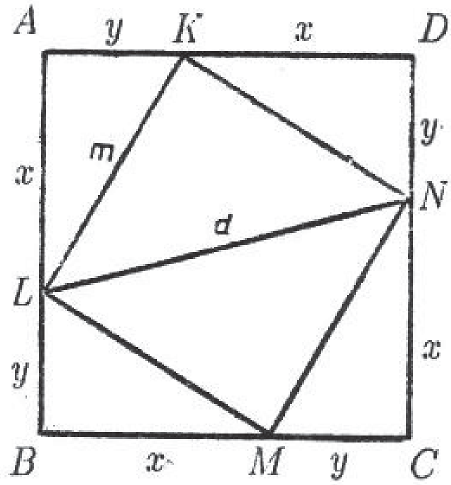
۲۲۴. مستطیل $KLMN$ را در مربع $ABCD$ محاط کرده‌ایم (شکل ۴۰). چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ AKL، BLM، CMN و DKN به‌دست می‌آید. این چهار مثلث، زاویه‌هایی برابر دارند و، بنابراین، ضلع‌های آن‌ها، متناسب‌اند (مثلث‌ها، دوبه‌دو متشابه‌اند). درضمن، هردو مثلث متقابل، باهم برابرند (دو مثلث با زاویه‌های قائمهٔ A و C، دو مثلث با زاویه‌های قائمهٔ B و D).

طول ضلع‌های مثلث AKL را با x و y، و طول‌های مثلث BLM را با u و v نشان می‌دهیم. روشن است که

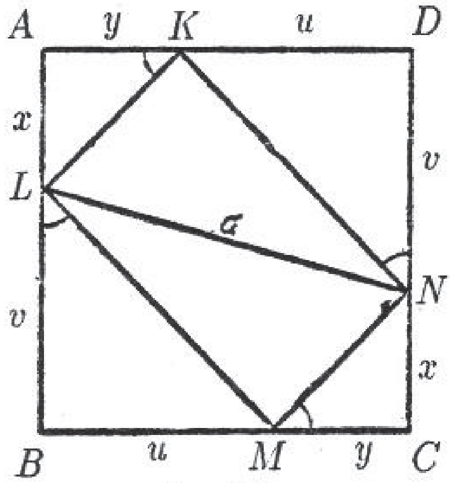
$$x + v = y + u = a$$

برای دو مثلث AKL و BLM می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a-y}{a-x}$$



شکل ۳۹



شکل ۴۰

از این‌جا، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$x(a-x) = y(a-y);$$
$$ax - x^۲ = ay - y^۲;$$
$$a(x-y) = (x+y)(x-y);$$
$$(x+y-a)(x-y) = ۰$$

برای صفر شدن حاصل‌ضرب دو مقدار، کافی است، یکی از آن‌ها، برابر صفر باشد، دو حالت پیش می‌آید:

الف) $x + y - a = ۰$ یا $x + y = a$ (شکل ۳۹). در این‌حالت $x = u$ و $y = v$ و $KLMN$ یک مربع است. قطر و مساحت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$S = x^۲ + y^۲ = m^۲$$

یعنی ضلع مربع محاطی برابر $m = \sqrt{S}$ است و قطر آن

$$d^۲ = m^۲ + m^۲ = ۲m^۲ \Rightarrow d = m\sqrt{۲} = \sqrt{۲S}$$

درضمن دراین حالت

$$S = x^۲ + y^۲ \geq \frac{۱}{۲}(x+y)^۲ = \frac{۱}{۲}a^۲$$

توجه کنید: دراین‌جا، از نابرابری

$$x^۲ + y^۲ \geq \frac{۱}{۲}(x+y)^۲$$

استفاده کردیم که، درستی آن، به‌سادگی ثابت می‌شود. درواقع، اگر پرانتز را باز کنیم و به‌سمت چپ نابرابری بیاوریم، به نابرابری

$$\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}y^۲ - xy \geq ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰$$

ویا $(x-y)^۲ \geq ۰$ می‌رسیم که درستی آن، روشن است.

ب) $x = y$ **(شکل ۴۰)**. دراین حالت $u = v$ و قطرهای مربع $ABCD$ با ضلع‌های مستطیل محاطی، موازی است. طول ضلع‌های مستطیل محاطی را m و n می‌گیریم. اگر طول قطر آن، برابر d باشد، داریم:

$$\begin{aligned} d^۲ &= m^۲ + n^۲ = ۲(x^۲ + u^۲) = \\ &= ۲[(x+u)^۲ - ۲xu] = ۲(a^۲ - S) \end{aligned}$$

دراین حالت

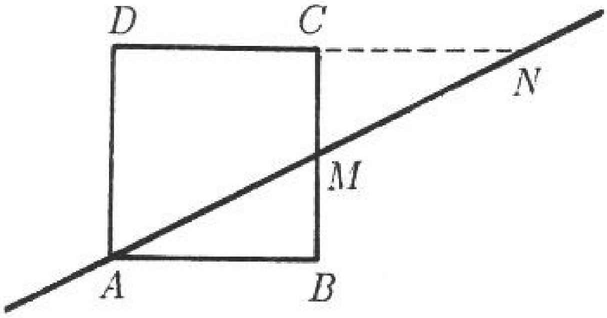
$$S = ۲xu \leq \frac{(x+u)^۲}{۲} = \frac{۱}{۲}a^۲$$

به‌این ترتیب، اگر $۰ < S \leq \frac{۱}{۲}a^۲$، آن‌وقت

$$d = \sqrt{۲(a^۲ - S^۲)}$$

و اگر $\frac{۱}{۲}a^۲ \leq S < a^۲$، آن‌وقت

$$d = \sqrt{۲S}$$



شکل ۴۱

هردوحالت را می‌توان بایک دستور نشان داد:

$$d = \sqrt{a^۲ + |۲S - a^۲|}$$

۲۲۵. $|BM| = b$ می‌گیریم، دراین صورت $|CM| = a - b$ (شکل ۴۱ را ببینید). دو مثلث قائم‌الزاویه ABM و NCM، زاویه‌های برابر دارند و، بنابراین، ضلع‌های متناظر آن‌ها متناسب‌اند:

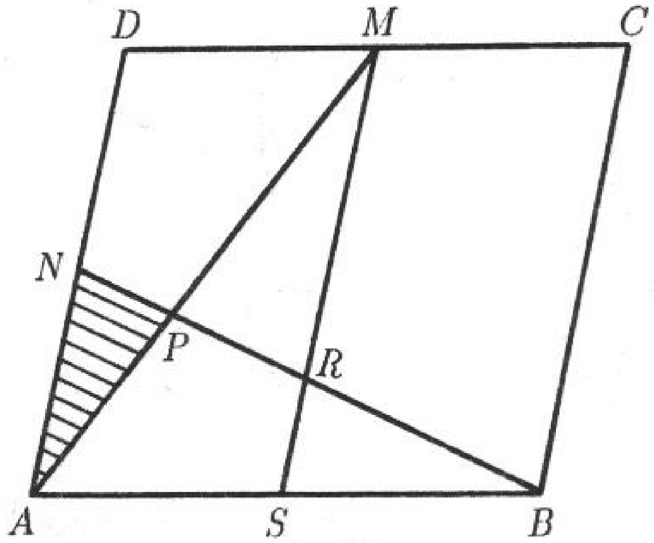
$$\frac{|CN|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|BM|} \Rightarrow |CM| = \frac{a(a-b)}{b}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{|CM|} - \frac{۱}{|CN|} = \frac{۱}{a-b} - \frac{b}{a(a-b)} =$$
$$= \frac{a-b}{a(a-b)} = \frac{۱}{a}$$

۲۲۶. خط راست MS را موازی ضلع AD رسم می‌کنیم تا BN را در نقطهٔ R و ضلع AB را در نقطهٔ S قطع کند (شکل ۴۲). دراین‌صورت

$$|RS| = \frac{۱}{۲}|AN| = \frac{۱}{۴}|AD| = \frac{۱}{۴}|SM|$$



شکل ۴۲

یعنی $|AN| = \frac{۳}{۲}|AD| = \frac{۳}{۴}|RM|$ و $|AP| = \frac{۳}{۲}|MP|$. از این‌جا $|AM| = \frac{۵}{۲}|AP|$ اکنون، یک پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش‌قضیه. *اگر دو مثلث در یک زاویه برابر باشند، آن‌وقت، نسبت مساحت‌های دو مثلث، برابر است با نسبت حاصل ضرب‌های دو ضلع پهلوی این زاویه.*

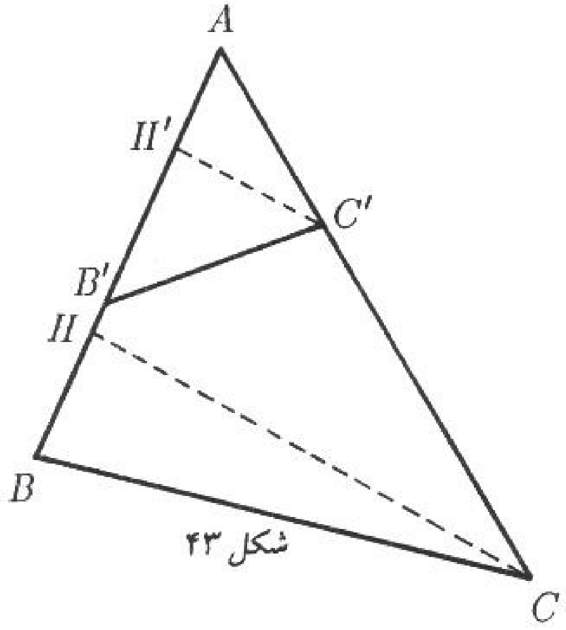
اثبات. دو مثلث ABC و $AB'C'$ را که در زاویه A مشترک‌اند، درنظر می‌گیریم (شکل ۴۳) داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|AB| \cdot |CH| = \frac{۱}{۲}|AB| \cdot |AC| \cdot \frac{|CH|}{|AC|};$$
$$S_{AB'C'} = \frac{۱}{۲}|AB'| \cdot |C'H'| = \frac{۱}{۲}|AB'| \cdot |AC'| \cdot \frac{|C'H'|}{|AC'|}$$

ولی، به‌دلیل متشابه بودن دو مثلث ACH و $AC'H'$ داریم:

$$\frac{|CH|}{|AC|} = \frac{|C'H'|}{|AC'|} \qquad (*)$$

اکنون، اگر برابری‌های مربوط به مساحت مثلث‌ها را برهم تقسیم کنیم،



شکل ۴۳

به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AB'| \cdot |AC'|}$$

پیش‌قضیه ثابت شد. به حل مساله برمی‌گردیم. باتوجه به پیش‌قضیه، داریم:

$$\frac{S_{ANP}}{S_{AMD}} = \frac{|AN| \cdot |AP|}{|AD| \cdot |AM|} = \frac{|AN|}{|AD|} \cdot \frac{|AP|}{|AM|} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۵}$$

چون مساحت مثلث AMD، $\frac{۱}{۴}$ مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است، بنابراین

$$S_{ANP} = \frac{۱}{۲۰} S_{ABCD}$$

۲۲۷. به‌ترتیب داریم:

$$۲^{۹} + ۲^{۹۹} = (۲^{۳})^{۳} + (۲^{۳۳})^{۳} =$$

$$= (۲^{۳} + ۲^{۳۳})(۲^{۶} - ۲^{۳} \times ۲^{۳۳} + ۲^{۶۶}) =$$

$$= [۲^{۳} + (۲^{۱۱})^{۳}] \times ۲(۲^{۵} - ۲^{۳۵} + ۲^{۶۵}) =$$

$$= ۲(۲ + ۲^{۱۱})(۲^{۲} - ۲^{۱۲} + ۲^{۲۲})(۲^{۵} - ۲^{۳۵} + ۲^{۶۵}) =$$

$$= ۴(۱ + ۲^{۱۰})(۲^{۲} - ۲^{۱۲} + ۲^{۲۲})(۲^{۵} - ۲^{۳۵} + ۲^{۶۵}) =$$
$$= ۴ \times ۱۰۲۵(۲^{۲} - ۲^{۱۲} + ۲^{۲۲})(۲^{۵} - ۲^{۳۵} + ۲^{۶۵}) =$$
$$= ۴۱۰۰n.$$

یعنی $۲^{۹۹} + ۲^{۹}$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۲۲۸. سمت چپ برابری را، به‌این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$x^{۲} + y^{۲} + x + ۳y + ۵ =$$
$$= (x^{۲} + x) + (y^{۲} + ۳y) + ۵ =$$
$$= \left[\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴}\right] + \left[\left(y + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} - \frac{۹}{۴}\right] + ۵ =$$
$$= \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(y + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} + \frac{۵}{۲}$$

و این عبارت، به‌ازای مقدارهای حقیقی x و y، نمی‌تواند برابر صفر شود، زیرا $\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} \geq ۰$ و $\left(y + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} \geq ۰$ و بنابراین

$$\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(y + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} + \frac{۵}{۲} > ۰$$

برای x و y، هیچ عددی پیدا نمی‌شود.

۹. تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها

۲۲۹.

$۱)\ ۶ab(۲a - ۳b + ۱);\quad ۲)\ (a - ۲b)(۳x + ۵y + ۱);$

$۳)\ ۷xy(۸a + ۵b)(۲x + ۵y);$

$۴)\ ۳a^{۳}b^{۲} - ۱۲ab^{۴} = ۳ab^{۲}(a^{۲} - ۴b^{۲}) =$

$= ۳ab^۲(a + ۲b)(a - ۲b);$

$۵)\ x^۴ - y^۴ = (x^۲ + y^۲)(x^۲ - y^۲) =$

$= (x^۲ + y^۲)(x + y)(x - y);$

$۶)\ a^۶ - b^۶ = (a^۳)^۲ - (b^۳)^۲ = (a^۳ + b^۳)(a^۳ - b^۳) =$

$= (a + b)(a^۲ - ab + b^۲)(a - b)(a^۲ + ab + b^۲);$

$۷)\ x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۲xy = (x - y)^۲ - z^۲ =$

$= (x - y + z)(x - y - z);$

$۸)\ x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ = (x^۴ + ۲x^۲y^۲ + y^۴) - x^۲y^۲ =$

$= (x^۲ + y)^۲ - x^۲y^۲ = (x^۲ + y^۲ + xy)(x^۲ + y^۲ - xy);$

$۹)\ x^۴ + y^۴ = (x^۴ + ۲x^۲y^۲ + y^۴) - ۲x^۲y^۲ =$

$= (x^۲ + y^۲)^۲ - (\sqrt{۲}xy)^۲ = (x^۲ + g^۲ + \sqrt{۲}xy)(x^۲ + y^۲ - \sqrt{۲}xy);$

$۱۰)\ x^۴ - x^۲y^۲ + y^۴ = (x^۲ + y^۲)^۲ - ۳x^۲y^۲ =$

$= (x^۲ + y^۲ + \sqrt{۳}xy)(x^۲ + y^۲ - \sqrt{۳}xy);$

$۱۱)\ x^۴ - ۵x^۲ + ۴ = x^۴ - (۴ + ۱)x^۲ + ۴ \times ۱ =$

$= (x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱) = (x + ۲)(x - ۲)(x + ۱)(x - ۱);$

$۱۲)\ ab(a + b) + bc(b - c) - ac(a + c) =$

$= ab(a + b) + b^۲c - bc^۲ - a^۲c - ac^۲ =$

$= ab(a + b) + (b^۲c - a^۲c) + (-bc^۲ - ac^۲) =$

$= ab(a + b) - c(a^۲ - b^۲) - c^۲(a + b) =$

$= ab(a + b) - c(a + b)(a - b) - c^۲(a + b) =$

$= (a + b)[ab - c(a - b) - c^۲] =$

$= (a+b)[(ab+bc)+(-ac-c^۲)] =$

$= (a+b)[b(a+c)-c(a+c)] =$

$= (a+b)(a+c)(b-c);$

۱۳) $x^۴+y^۴+z^۴-۲x^۲y^۲-۲x^۲z^۲-۲y^۲z^۲ =$

$= (x^۴+y^۴+z^۴+۲x^۲y^۲-۲x^۲z^۲-۲y^۲z^۲)-۴x^۲y^۲ =$

$= (x^۲+y^۲-z^۲)^۲-(۲xy)^۲ =$

$= (x^۲+y^۲-z^۲+۲xy)(x^۲+y^۲-z^۲-۲xy) =$

$= [(x+y)^۲-z^۲][(x-y)^۲-z^۲] =$

$= (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

۱۴) این چندجمله‌ای را با دو روش تجزیه می‌کنیم:

$۲t^۴+t^۳+۴t^۲+t+۲ =$

$= ۲(t^۴+۲t^۲+۱)+(t^۳+t) = ۲(t^۲+۱)^۲+t(t^۲+۱) =$

$= (t^۲+۱)(۲t^۲+t+۲);$

$۲t^۴+t^۳+۴t^۲+t+۲ =$

$= (۲t^۴+۲t^۲)+(t^۳+t)+(۲t^۲+۲) =$

$= ۲t^۲(t^۲+۱)+t(t^۲+۱)+۲(t^۲+۱) =$

$= (t^۲+۱)(۲t^۲+t+۲)$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $۲t^۲+t+۲$ قابل‌تجزیه نیست (آزمایش کنید!).

۱۵) $x^۴-۲x^۲+۱۲x-۸ =$

$= (x^۴+۸x)+(-۲x^۲+۴x-۸) =$

$$= x(x^۳ + ۸) - ۲(x^۲ - ۲x + ۴) =$$
$$= x(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴) - ۲(x^۲ - ۲x + ۴) =$$
$$= (x^۲ - ۲x + ۴)(x^۲ + ۲x - ۲) =$$
$$= (x^۲ - ۲x + ۴)[(x + ۱)^۲ - ۳] =$$
$$= (x^۲ - ۲x + ۴)(x + ۱ + \sqrt{۳})(x + ۱ - \sqrt{۳})$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲ - ۲x + ۴$ قابل‌تجزیه به ضرب دو عامل درجه اول نیست، زیرا چنین می‌شود:

$$x^۲ - ۲x + ۴ = (x - ۱)^۲ + ۳$$

.۲۳۰

$$۱)\ (a + b + c)^۳ - a^۳ - b^۳ - c^۳ =$$
$$= [(a + b) + c]^۳ - (a^۳ + b^۳) - c^۳ =$$
$$= (a + b)^۳ + ۳(a + b)^۲c + ۳(a + b)c^۲ + c^۳ -$$
$$-(a + b)(a^۲ - ab + b^۲) - c^۳ =$$
$$= (a + b)[(a + b)^۲ + ۳(a + b)c + ۳c^۲ - a^۲ + ab - b^۲) =$$
$$= (a + b)(۳ab + ۳ac + ۳bc + ۳c^۲) =$$
$$= ۳(a + b)[(ab + ac) + (bc + c^۲)] =$$
$$= ۳(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] =$$
$$= ۳(a + b)(b + c)(c + a)$$

یادداشت ۱. چندجمله‌ای

$$A = ۵x^۴ - ۳x^۳ + ۷x^۲ - ۶x - ۳$$

را درنظر بگیرید. چندجمله‌ای A، به‌ازای $x = ۱$ برابر صفر می‌شود:

$$۵ - ۳ + ۷ - ۶ - ۳ = ۰$$

از این‌جا، به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که، چندجمله‌ای A، بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. فرض کنید از تقسیم A بر $x - ۱$، خارج‌قسمت برابر B و باقی‌مانده‌برابر R باشد، دراین‌صورت، باید داشته‌باشیم:

$$A = (x - ۱)B + R$$

این، یک اتحاد است (اتحاد تقسیم)، زیرا با ضرب بخشیاب در خارج‌قسمت و سپس، اضافه کردن باقی‌مانده به این حاصل‌ضرب، باید بخشی به‌دست آید. یعنی دوطرف برابری، معرف یک مقدار و، بنابراین، اتحاد است.

در اتحاد، به‌جای حرف (در این‌جا x)، هر عددی قرار دهیم، دوطرف برابر می‌شوند. اگر به‌جای x، عدد ۱ قرار دهیم، هم A و هم $B(x - ۱)$ برابر صفر می‌شود، یعنی به‌دست می‌آید: $R = ۰$ و از آن‌جا

$$A = (x - ۱)B$$

A بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است یا، به‌زبان دیگر، در تجزیه A، عامل $x - ۱$ وجود دارد.

این نتیجه‌گیری، کلی است: اگر یک چندجمله‌ای به‌ازای $x = ۵$ یا $x = -۲$ برابر صفر شود، به‌معنای آن است که چندجمله‌ای بر $x - ۵$ یا $x + ۲$ بخش‌پذیر است؛ همچنین، اگر یک چندجمله‌ای به‌ازای مثلاً $x = -y$ برابر صفر شود، به‌این معناست که چندجمله‌ای بر $x + y$ بخش‌پذیر است.

یادداشت ۲. این چندجمله‌ای‌ها را درنظر بگیرید:

$$x + y; \quad xy; \quad x^۲ + y^۲; \quad xy^۲ + x^۲y$$

در هرکدام از این‌ها، اگر x را به y و y را به x تبدیل کنیم، چندجمله‌ای تغییر نمی‌کند. هریک از این چندجمله‌ای‌ها، نسبت به x همان وضعی را دارند که نسبت به y. گویند، این چندجمله‌ای‌ها، نسبت به x و y متقارن‌اند.

چندجمله‌ای

$$x^۴ + x^۳y + x^۲y^۲ + xy^۳ + y^۴$$

هم، نسبت به x و y متقارن است.

همچنین، چندجمله‌ای‌های

$$x + y + z - xyz; \quad x^۳ + y^۳ + z^۳$$

نسبت به x و y و z متقارن‌اند، یعنی، در هریک از آن‌ها، می‌توان هردو مجهول دلخواه را باهم عوض کرد، بدون این‌که تغییری در عبارت به‌وجود آید: می‌توان x را به y و y را به x، یا x را به z و z را به x، یا y را به z و z را به x تبدیل کرد، بدون این‌که در عبارت تغییری حاصل شود.

ویژگی اصلی یک چندجمله‌ای یا عبارت متقارن (نسبت به دو یا چند حرف)، این است که، هر تبدیلی در آن انجام شود (تجزیه شود، پرانتزها باز شوند، ساده شود و غیره)، بازهم باید عبارتی متقارن به‌دست آید.

□

اکنون، باتوجه به این دو یادداشت، می‌توان تمرین ۱۳۰، ۱) را ساده‌تر حل کرد.

این عبارت نسبت به a و b و c متقارن است، پس باید تجزیهٔ آن هم، نسبت به a و b و c، متقارن باشد.

ازطرف دیگر، این عبارت، به‌ازای $a = -b$ برابر صفر می‌شود (آزمایش کنید!)، پس بر $a + b$ بخش‌پذیر است. ولی به‌دلیل متقارن بودن نسبت به a

و b و cو باید بر $b+c$ و a و $c+a$ نیز بخش‌پذیر باشد. یعنی باید داشته‌باشیم

$$(a+b+c)^۳-a^۳-b^۳-c^۳=m(a+b)(b+c)(c+a)$$

m یک عدد است و به a و b و c بستگی ندارد، زیرا سمت چپ برابری، نسبت به a، از درجهٔ دوم است ($a^۳$ و $-a^۳$ حذف می‌شوند). بنابراین اگر m شامل a باشد، سمت راست برابری بالاتر از درجه دوم می‌شود.

چون برابری بالا، یک اتحاد است، می‌توان برای پیدا کردن مقدار m، به‌جای a و b و c، سه عدد دلخواه قرار داد، مثلاً $a=۱$، $b=۲$ و $c=۰$، در این صورت به‌دست می‌آید،

$$(۱+۲+۰)^۳-۱^۳-۲^۳=m(۱+۲)(۲+۰)(۰+۱)$$

یا $۶m=۱۸$، یعنی $m=۳$ و

$$(a+b+c)^۳-a^۳-b^۳-c^۳=۳(a+b)(b+c)(c+a);$$

$$\begin{aligned}
&۲)\ (a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳=\\
&=(a-b)^۳+(b^۳-۳b^۲c+۳bc^۲-c^۳)+(c^۳+۳ca^۲-۳c^۲a-a^۳)=\\
&=(a-b)^۳+(۳ca^۲-۳b^۲c)+(۳bc^۲-۳ac^۲)-(a^۳-b^۳)=\\
&=(a-b)^۳+۳c(a^۲-b^۲)-۳c^۲(a-b)-(a-b)(a^۲+ab+\\
&+b^۲)=(a-b)[(a-b)^۲+۳c(a+b)-۳c^۲-a^۲-ab-b^۲]=\\
&=(a-b)[a^۲-۲ab+b^۲+۳ac+۳bc-۳c^۲-a^۲-ab-b^۲]=\\
&=۳(a-b)(-ab+ac+bc-c^۲)=\\
&=۳(a-b)[-a(b-c)+c(b-c)]=\\
&=۳(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

یادداشت. این عبارت متقارن نیست، زیرا اگر مثلاً a را به b و b را به a تبدیل کنیم، عبارت به قرینهٔ خودش تبدیل می‌شود. به‌همین مناسبت، گاهی آن را «متقارن منفی» می‌نامند.

ولی این عبارت، نسبت به a و b و c، **دوری** است، یعنی اگر a را به b، b را به c و c را به a تبدیل کنیم، در عبارت تغییری حاصل نمی‌شود.

باتوجه به همین ویژگی دوری بودن عبارت، و باتوجه به این‌که به‌ازای $a = b$ برابر صفر می‌شود، می‌توان شبیه تمرین قبل، آن را تجزیه کرد. (خودتان عمل و استدلال کنید).

۳) این عبارت، در وضعی که داده شده‌است، نسبت به x و y و z، نه متقارن است و نه دوری. به‌نظر می‌رسد که باید با باز کردن پرانتزها، برای تجزیهٔ آن تلاش کرد. ولی اگر دراین عبارت، به‌جای x، $-x_۱$ بگذاریم، یعنی فرض کنیم $x = -x_۱$، به این عبارت می‌رسیم:

$$(x_۱ - y)^۳ + (y - z)^۳ + (z - x_۱)^۳$$

که همان عبارت تمرین ۲) از مسالهٔ ۲۳۰ است. درواقع این عبارت نسبت به $x_۱$ و y و z دوری است و باتوجه به حل تمرین ۲)، نتیجهٔ تجزیهٔ آن چنین است:

$$۳(x_۱ - y)(y - z)(z - x_۱) =$$
$$= ۳(x + y)(z - y)(x + z)$$

۴) اگر $a^۲ - a^۲$ را به‌عبارت اضافه کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$a^۵ + a + ۱ = (a^۵ - a^۲) + (a^۲ + a + ۱) =$$
$$= a^۲(a - ۱)(a^۲ + a + ۱) + (a^۲ + a + ۱) =$$
$$= (a^۲ + a + ۱)(a^۳ - a^۲ + ۱)$$

۵) در آغاز، عبارت را به‌این صورت می‌نویسیم (نام عبارت را، برای سادگی کار، A می‌گذارنیم):

$$A = [x(x+۳)]\cdot[(x+۱)(x+۲)] - ۱۲۰ =$$
$$= (x^۲+۳x)(x^۲+۳x+۲) - ۱۲۰$$

اکنون $x^۲+۳x$ را y می‌نامیم:

$$A = y(y+۲) - ۱۲۰ = y^۲ + ۲y - ۱۲۰ =$$
$$= (y+۱)^۲ - ۱۲۱ = (y+۱+۱۱)(y+۱-۱۱) =$$
$$= (x^۲+۳x+۱۲)(x^۲+۳x-۱۰) =$$
$$= (x^۲+۳x+۱۲)(x-۲)(x+۵)$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲+۳x+۱۲$ قابل تجزیه نیست (آزمایش کنید).

۶) به‌ترتیب داریم:

$$(a^۲+b^۲+c^۲)^۲ - ۲(a^۴+b^۴+c^۴) =$$
$$= -a^۴ - b^۴ - c^۴ + ۲a^۲b^۲ + ۲a^۲c^۲ + ۲b^۲c^۲ =$$
$$= -(a^۴+b^۴+c^۴+۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲-۲b^۲c^۲) + ۴a^۲b^۲ =$$
$$= ۴a^۲b^۲ - (a^۲+b^۲-c^۲)^۲ =$$
$$= (۲ab+a^۲+b^۲-c^۲)(۲ab-a^۲-b^۲+c^۲) =$$
$$= [(a+b)^۲-c^۲][c^۲-(a-b)^۲] =$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

.۲۳۱

۱) $\frac{m}{a^۲b} + \frac{n}{ab^۲} = \frac{mb+na}{a^۲b^۲};$

۲) $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{b-a}=\frac{x}{a-b}-\frac{y}{a-b}=\frac{x-y}{a-b};$

۳) $\frac{a-b}{2a^2-ab-3b^2}+\frac{a+b}{2a^2-5ab+3b^2}=$

$$=\frac{a-b}{(2a^2-3ab)+(2ab-3b^2)}+\frac{a+b}{(2a^2-3ab)-(2ab-3b^2)}=$$

$$=\frac{a-b}{a(2a-3b)+b(2a-3b)}+\frac{a+b}{a(2a-3b)-b(2a-3b)}=$$

$$=\frac{a-b}{(2a-3b)(a+b)}+\frac{a+b}{(2a-3b)(a-b)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(2a-3b)(a+b)(a-b)}=\frac{2(a^2+b^2)}{(2a-3b)(a^2-b^2)};$$

۴) $\frac{x^2-a^2}{x^2-bx+cx-bc}:\frac{x^2-ax-cx+ac}{x^2-b^2}=$

$$=\frac{(x-a)(x+a)}{(x-b)(x+c)}\times\frac{(x-b)(x+b)}{(x-a)(x-c)}=-\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x-c)};$$

۵) $\frac{5a}{a+b}-\frac{2a-3b}{a-b}-\frac{2(a^2-3ab+b^1}{a^2-b^2}=$

$$=\frac{5a(a-b)-(2a-3b)(a+b)-2(a^2-3ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

۶) صورت و مخرج کسر مرکب را، به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{4xy}{x^2-y^2};$$

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{۲(x^۲+y^۲)}{x^۲-y^۲}$$

بنابراین حاصل کسر مرکب، چنین می‌شود:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}=\frac{۲xy}{x^۲+y^۲},$$

حاصل کسر دوم هم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^۲y^۲}{۲(x^۲+y^۲)}$$

بنابراین نتیجه عمل‌های این تمرین، منجر می‌شود به

$$\frac{۲xy}{x^۲+y^۲}\times\frac{۲(x^۲+y^۲)}{x^۲y}=\frac{۴}{xy};$$

۷) برای این‌که صورت مساله را تکرار نکنیم، حاصل عبارت را، برابر A می‌گیریم:

$$A=\left[\left(\frac{۱۲-a^۲-۸}{۴a}\right)\times\frac{۴}{۲-a}-\left(\frac{a+۲}{a}\right)\right]\times\frac{۴-a}{a}=$$

$$=\left(\frac{۴-a^۲}{۴a}\times\frac{۴}{۲-a}-\frac{a+۲}{a}\right)\times\frac{۴-a}{a}=$$

$$=\left(\frac{۲+a}{a}-\frac{a+۲}{a}\right)\times\frac{۴-a}{a}=۰\times\frac{۴-a}{a}=۰$$

.۲۳۲

$$۱)\ \frac{۵a^۲-۵ax}{a^۲-x^۲}=\frac{۵a(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{۵a}{a+x};$$

$$۲)\ \frac{۸۱a^{۴} - ۱۶b^{۴}}{۳a + ۲b} = \frac{(۹a^{۲} + ۴b^{۲})(۳a + ۲b)(۳a - ۲b)}{۳a + ۲b} =$$

$$= (۹a^{۲} + ۴b^{۲})(۳a - ۲b);$$

$$۳)\ \frac{a^{۶} - b^{۶}}{a^{۲} - b^{۲}} = \frac{(a^{۲})^{۳} - (b^{۲})^{۳}}{a^{۲} - b^{۲}}) =$$

$$= \frac{(a^{۲} - b^{۲})(a^{۴} + a^{۲}b^{۲} + b^{۴})}{a^{۲} - b^{۲}} = a^{۴} + a^{۲}b^{۲} + b^{۴} =$$

$$= (a^{۲} + b^{۲})^{۲} - a^{۲}b^{۲} = (a^{۲} + ab + b^{۲})(a^{۲} - ab + b^{۲});$$

۴) اگر به‌طور مستقیم، صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، خارج‌قسمت چنین می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر صفر است):

$$۱۶a^{۴} - ۸a^{۳}b + ۴a^{۲}b^{۲} - ۲ab^{۳} + b^{۴}$$

$$۵)\ \frac{a^{۴} + ۴a + ۱۶}{a^{۳} + ۸} = \frac{(a^{۲} + ۴)^{۲} - ۴a^{۲}}{a^{۳} + ۲^{۳}} =$$

$$= \frac{(a^{۲} - ۲a + ۴)(a^{۲} + ۲a + ۴)}{(a + ۲)(a^{۲} - ۲a + ۴} = \frac{a^{۲} + ۲a + ۴}{a + ۲};$$

$$۶)\ \frac{۲۴x^{۶} - ۳۷۵y^{۹}}{۴x^{۵} + ۱۰x^{۳}y^{۳} + ۲۵xy^{۶}} = \frac{۳[(۲x^{۲})^{۳} - (۵y^{۳})^{۳}]}{x(.۴x^{۴} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۲۵y^{۶})} =$$

$$= \frac{۳(۲x^{۲} - ۵y^{۳})(۴x^{۲} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۲۵y^{۶})}{x(۴x^{۲} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۲۵y^{۶})} = \frac{۳(۲x^{۲} - ۵y^{۳})}{x}$$

۷) حاصل عبارت را M می‌نامیم:

$$M = \frac{\frac{m^{۲} + n^{۲} - mn}{n}}{\frac{m - n}{mn}} \times \frac{(m + n)(m - n)}{(m + n)(m^{۲} - mn + n^{۲})} =$$

$$= \frac{m(m^۲ + n^۲ - mn)}{m - n} \times \frac{(m+n)(m-n)}{(m+n)(m^۲ - mn + n^۲)} = m$$

۸) حاصل عبارت را B می‌گیریم:

$$B = \frac{y+z}{xy+xz+۱} \times \frac{xy+۱}{y} - \frac{z}{y(xy+xz+۱)} =$$
$$= \frac{(y+z)(xy+۱) - z}{y(xy+xz+۱)} =$$
$$= \frac{xy(y+z) + y + z - z}{y(xy+xz+۱)} = \frac{y(xy+xz+۱)}{y(xy+xz+۱)} = ۱;$$

۹) حاصل عبارت را X می‌نامیم:

$$X = \frac{(۱۷x+۱)(x-۱)}{(۱۷x+۱)(x+۱)} \times \frac{(x+۱)^۲}{(x+۱)(x-۱)} = ۱$$

۲۳۳. پاسخ. $\left(\frac{x^۲}{x^۲+y^۲} - \frac{y^۲}{x^۲+y^۲}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

۲۳۴. پاسخ. $\frac{۱}{۳}\pi H(R^۲ + Rr + r^۲)$.

۲۳۵. ابتدا هریک از کسرها را ساده کنید، بعد مقدارها را قرار دهید.

$$۱)\ \frac{a^۲ - ۲ab + b^۲}{ab - b^۲} = \frac{(a-b)^۲}{b(a-b)} = \frac{a-b}{b} =$$
$$= \frac{-۰/۵ + ۱/۵}{-۱/۵} = -\frac{۱}{۱/۵} = -\frac{۲}{۳};$$
$$۲)\ \frac{(a+b)^۲ - c^۲}{a+b+c} = a + b - c = ۰/۲۵ + \frac{۲}{۳} + ۰/۵ =$$
$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} = ۱\frac{۵}{۱۲};$$

$$۳)\ \frac{x^۲ - ۳ax}{b^۲ + ab - ۲a^۲} = \frac{(a-b)^۲ - ۳a(a-b)}{b^۲ - ab + ۲ab - ۲a^۲} =$$

$$= \frac{(a-b)(a-b-۳a)}{b(b-a) + ۲a(b-a)} = \frac{(b-a)(b+۲a)}{(b-a)(b+۲a)} = ۱$$

.۲۳۶

$$۱)\ a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab = ۱ - ۲ = -۱;$$

$$۲)\ a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b) =$$

$$= (-۱)^۳ - ۳ \times ۱(-۱) = -۱ + ۳ = ۲;$$

$$۳)\ a^۴ + b^۴ = (a^۲ + b^۲)^۲ - ۲a^۲b^۲ = (-۱)^۲ - ۲ = -۱;$$

$$۴)\ \frac{۱}{a^{۱۲}} + \frac{۱}{b^{۱۲}} = \frac{a^{۱۲} + b^{۱۲}}{a^{۱۲}b^{۱۲}} = \frac{(a^۴)^۳ + (b^۴)^۳}{(ab)^{۱۲}} =$$

$$= (a^۴ + b^۴)^۳ - ۳a^۴b^۴(a^۴ + b^۴) =$$

$$= (-۱)^۳ - ۳ \times ۱(-۱) = -۱ + ۳ = ۲;$$

$$۵)\ a^۹ + b^۹ = (a^۳)^۳ + (b^۳)^۳ = (a^۳ + b^۳)^۳ -$$

$$-۳a^۳b^۳(a^۳ + b^۳) = ۲^۳ - ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲;$$

$$۶)\ a^{۱۶} + b^{۱۶} = (a^۸)^۲ + (b^۸)^۲ = (a^۸ + b^۸)^۲ -$$

$$-۲a^۸b^۸ = [(a^۴)^۲ + (b^۴)^۲]^۲ - ۲ = [(a^۴ + b^۴)^۲ - ۲a^۴b^۴]^۲ -$$

$$-۲ = [(-۱)^۲ - ۲]^۲ - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$$

۲۳۷. برابری فرض را، می‌توان این‌طور نوشت ($a^۲$ را به دو طرف برابری اضافه می‌کنیم):

$$a^۲ = (a^۲ + c^۲ - ۲ac) + (۲ab - ۲bc) =$$

$$= (a-c)^۲ + ۲b(a-c)$$

به‌همین ترتیب، اگر b^2 را به دو طرف برابری اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$b^2 = (b-c)^2 + 2a(b-c)$$

اکنون داریم:

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{2(a-c)^2 + 2b(a-c)}{2(b-c)^2 + 2a(b-c)} =$$
$$= \frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)} = \frac{a-c}{b-c}$$

در صورت مساله، دو شرط دیگر هم داده شده بود. باتوجه به شرط $b \neq c$، جواب مساله معنا دارد (مخرج ان برابر صفر نیست) و باتوجه به شرط $a + b \neq c$، توانستیم، صورت و مخرج کسر را بر $a + b - c$ (که مخالف صفر است)، تقسیم کنیم.

۲۳۸. *راهنمائی.* بزرگترین بخشیاب مشترک صورت و مخرج را، با روش تقسیم‌های متوالی به‌دست آورید! این بزرگترین بخشیاب مشترک، برابر است با $x^5 + 1$. صورت و مخرج بر $x^5 + 1$ بخش‌پذیر است

$$\frac{x^{15}+1}{x^{25}+1} = \frac{x^{10} - x^5 + 1}{x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1}$$

۲۳۹. صورت و مخرج را، به‌طور جداگانه، تجزیه می‌کنیم:

$$(a^3 + b^3)(a+b)^3 + 2a^3b^3 =$$
$$= (a^3+b^3)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + 2a^3b^3 =$$
$$= (a^6 + 2a^5b + 2a^3b^3 + a^2b^4) + (a^5b +$$
$$+ 2a^4b^2 + 2a^2b^4 + ab^5) + (a^4b^2 + 2a^3b^3 + 2ab^5 + b^6) =$$

$$= a^2(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) +$$
$$+ab(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) +$$
$$+b^2(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) =$$
$$= (a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)(a^2 + ab + b^2);$$
$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 + a^2b^2 =$$
$$= (a^2 + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) + a^2b^2 =$$
$$= a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$$
$$= (a^2 + ab + b^2)^2$$

بنابراین، صورت و مخرج کسر بر $a^2 + ab + b^2$ بخش‌پذیرند و مقدار کسر، بعد از ساده‌شدن، چنین می‌شود:

$$\frac{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}$$

۲۴۰. اگر جذر عدد را بگیریم، حاصل جذر، برابر ۱۵۶۲۵ و باقی‌ماندهٔ جذر برابر ۱۰۲۴ می‌شود. بنابراین

$$244141649 = 15625^2 + 1024,$$

۱۰۲۴ برابر است با 2^6 و ۱۵۶۲۵ (اگر جذر بگیریم)، برابر است با 125^2 یا 5^6. درنتیجه

$$244141649 = 5^{12} + 2^{10} =$$
$$= (5^{12} + 2 \times 5^6 \times 2^5 + 2^{10}) - 2 \times 5^6 \times 2^5 =$$
$$= (5^6 + 2^5)^2 - (5^3 \times 2^3)^2 =$$
$$= (5^6 + 2^5 - 1000)(5^6 + 2^5 + 1000) =$$
$$= 14657 \times 16657$$

۲۴۱. عددهای ۳ و ۵ و ۸، دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین، اگر عددی بر این سه عدد بخش‌پذیر باشد، بر حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی ۱۲۰ بخش‌پذیر خواهدبود.

$$۱)\ ۹x^۵ - ۵x^۳ - ۴x = (۹x^۵ - ۶x^۳ - ۳x) + (x^۳ - x) =$$
$$= ۳(۳x^۵ - ۲x^۳ - x) + (x - ۱)x(x + ۱)$$

چون حاصل‌ضرب سه عدد درست پشت سرهم بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین، عدد مفروض هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$۲)\ ۹x^۵ - ۵x^۳ - ۴x = (۱۰x^۵ - ۵x^۳ - ۵x) -$$
$$-(x^۵ - x) = ۵(۲x^۵ - x^۳ - x) - x(x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱) =$$
$$= ۵(۲x^۵ - x^۳ - x) - x(x - ۱)(x + ۱)(x^۲ + ۵ - ۴) =$$
$$= ۵(۲x^۵ - x^۳ - x) - ۵x(x - ۱)(x + ۱) -$$
$$-(x - ۲)(x - ۱)x(x + ۱)(x + ۲)$$

حاصل‌ضرب پنج عدد درست پشت سرهم، بر ۵ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد مفروض هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

$$۳)\ ۹x^۵ - ۵x^۳ - ۴x = x[(۸x^۴ - ۸) + (x^۴ - ۵x^۲ + ۴)] =$$
$$= x[۸(x^۴ - ۱) + (x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱)] =$$
$$= ۸[x(x^۴ - ۱)] + x(x^۲ - ۴)(x - ۱)(x + ۱)$$

اگر x عددی فرد باشد، $x - ۱$ و $x + ۱$ دو عدد زوج متوالی‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۸ بخش‌پذیر است. اگر x عددی زوج باشد، آن‌وقت $x^۵$، $x^۳$ و $۴x$ و، درنتیجه، $۹x^۵ - ۵x^۳ - ۴x$، بر ۸ بخش‌پذیر است.

۲۴۲. عدد دورقمی $\overline{xy}$ را a می‌نامیم. باتوجه به سمت راست برابری فرض، روشن است که $a^۲ - a$، یعنی $a(a - ۱)$، باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد. a و $a - ۱$، دو عدد متوالی‌اند و نسبت به‌هم، اول. بنابراین از a و $a - ۱$، یکی بر ۴ و دیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر است. اگر a بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد، می‌تواند برابر یکی از عددهای ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ شود، ولی در هیچ‌کدام از این سه‌حالت، به‌جز $a = ۲۵$، $a - ۱$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست. ولی $a = ۲۵$ در معادلهٔ مساله صدق نمی‌کند. اگر $a - ۱$ بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد، باید a برابر یکی از عددهای ۲۶، ۵۱ یا ۷۶ شود. و، از بین آن‌ها، تنها ۷۶ بر ۴ بخش‌پذیر است. آزمایش نشان می‌دهد که $\overline{xy} = ۷۶$ (یعنی $x = ۷$ و $y = ۶$)، در معادلهٔ مساله صدق می‌کند.

۲۴۳. داریم:

$$\frac{۲۹۵ - ۴۱۳\sqrt[۳]{۲} + ۱۷۷\sqrt[۳]{۴}}{۵ + ۳\sqrt[۳]{۴} - ۷\sqrt[۳]{۲}} =$$

$$= \frac{۵۹(۵ - ۷\sqrt[۳]{۲} + ۳\sqrt[۳]{۴})}{۵ + ۳\sqrt[۳]{۴} - ۷\sqrt[۳]{۲}} = ۵۹$$

۲۴۴. برابری فرض را می‌توان به‌ترتیب، به‌این صورت تبدیل کرد:

$$x(y + z - x) + y(z + x - y) = z(x + y - z);$$

$$۲xy - x^۲ - y^۲ = -z^۲;$$

$$(x - y)^۲ - z^۲ = ۰;$$

$$(x - y + z)(x - y - z) = ۰$$

این حاصل‌ضرب، وقتی برابر صفر می‌شود که، دست‌کم، یکی از عامل‌های ضرب برابر صفر باشد:

$$x - y + z = ۰ \Rightarrow x + z = y;$$

$$x - y - z = ۰ \Rightarrow y + z = x$$

۲۴۵. هریک از عبارت‌های صورت و مخرج را، به ضرب عامل‌ها، تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
&a^{۳}(c-b) + b^{۳}(a-c) + c^{۳}(b-a) = \\
&= c(a^{۳} - b^{۳}) - ab(a^{۲} - b^{۲}) - c^{۳}(a-b) = \\
&= (a-b)[c(a^{۲} + ab + b^{۲}) - ab(a+b) - c^{۳}] = \\
&= (a-b)(a^{۲}c + abc + b^{۲}c - a^{۲}b - ab^{۲} - c^{۳}) = \\
&= (a-b)[-a^{۲}(b-c) - ab(b-c) + c(b^{۲} - c^{۲})] = \\
&= (a-b)(b-c)(-a^{۲} - ab + bc + c^{۲}) = \\
&= (a-b)(b-c)[(c^{۲} - a^{۲}) + b(c-a) = \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c);
\end{aligned}$$

و برای مخرج

$$\begin{aligned}
&a^{۲}(c-b) + b^{۲}(a-c) + c^{۲}(b-a) = \\
&= a^{۲}c - a^{۲}b + ab^{۲} - b^{۲}c - c^{۲}(a-b) = \\
&= c(a^{۲} - b^{۲}) - ab(a-b) - c^{۲}(a-b) = \\
&= (a-b)(ac + bc - ab - c^{۲}) = \\
&= (a-b)[-a(b-c) + c(b-c)] = \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

درنتیجه، حاصل کسر، برابر $a + b + c$ می‌شود.

۲۴۶. ۱) روش گوس. مجموع را در دوجهت مختلف می‌نویسیم:

$$S_{۱} = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱) + n$$

$$S_1 = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

و باهم جمع می‌کنیم:

$$2S_1 = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$$

و چون تعداد جمله‌ها برابر n است:

$$2S_1 = n(n+1) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

روش استفاده از اتحادها. این اتحاد را درنظر می‌گیریم:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

اتحاد، به‌ازای هر مقدار دلخواه a برقرار است. به‌جای a، به‌ترتیب، عددهای درست از 0 تا n را قرار می‌دهیم و، بدون این‌که طرف‌های سمت راست را ساده کنیم، زیرهم می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
a = 0:&\quad 1^2 = 1\\
a = 1:&\quad 2^2 = 1^2 + 2\times 1 + 1\\
a = 2:&\quad 3^2 = 2^2 + 2\times 2 + 1\\
a = 3:&\quad 4^2 = 3^2 + 2\times 3 + 1\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
a = n:&\quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1
\end{aligned}$$

این $(n+1)$ سطر را باهم جمع می‌کنیم. همهٔ جمله‌های ستون سمت چپ برابری‌ها، با جمله‌های مساوی خود، در نخستین ستون سمت راست برابری‌ها، حذف می‌شوند (1^2 با 1^2 در سطر بعد، 2^2 با 2^2 در سطر بعد و غیره). تنها جملهٔ $(n+1)^2$ می‌ماند. درسمت راست، نخستین ستون حذف

شده است؛ مجموع ستون دوم برابر است با

$$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + 2n =$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2S_1$$

در آخرین ستون سمت راست، به تعداد $n + 1$ عددِ برابر ۱ داریم که مجموع آن‌ها برابر $n + 1$ می‌شود. بنابراین به‌دست می‌آید:

$$(n + 1)^2 = 2S_1 + n + 1$$

از این‌جا: $2S_1 = (n + 1)^2 - n - 1$ و یا

$$2S_1 = n^2 + n = n(n + 1) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

مثال.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1373 = \frac{1}{2} \times 1373(1373 + 1) =$$
$$= 1373 \times 687 = 943251$$

۲) این‌بار، از اتحاد

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

استفاده می‌کنیم و، شبیه حالت قبل، به‌جای a، عددهای درست از ۰ تا n را قرار می‌دهیم و سپس، باهم جمع می‌کنیم (خودتان، آن‌ها را بنویسید). نتیجهٔ مجموع، چنین می‌شود.

$$(n + 1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1$$

به‌جای S_1، مقدارش $\frac{1}{2}n(n+1)$ را می‌گذاریم

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

دوطرف برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم و، سمت راست، از $n+1$ فاکتور می‌گیریم:

$$6S_2 = (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] =$$
$$= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) =$$
$$= n(n+1)(2n+1)$$

و سرانجام

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

مثال. مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$$P = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2.$$

حل. در سمت راست برابری از $4 = 2^2$ فاکتور می‌گیریم:

$$P = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 4S_2$$

درنتیجه $P = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

محاسبهٔ زیرهم، برای مجموع مجذورهای عددهای فرد، روشن است:

$$Q = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2) - (2^2 + \ldots + (2n)^2) =$$
$$= \frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) =$$

$$= \frac{1}{3}n(2n+1)[(4n+1)-2(n+1)] =$$
$$= \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

۳) در آغاز، حاصل $(a+1)^4$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(a+1)^4 = [(a+1)^2]^2 = (a^2+2a+1)^2 =$$
$$= a^4+4a^3+6a^2+4a+1$$

اکنون اگر، شبیه دو حالت قبل، در دوطرف این اتحاد، به‌جای a، عددهای درست از ۰ تا n را قرار دهیم و سپس، باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^4 = 4S_3+6S_2+4S_1+n+1$$

به‌جای S_1 و S_2، مقدارشان را قرار می‌دهیم

$$4S_3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) =$$
$$= (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] =$$
$$= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1) =$$
$$= (n+1)(n^3+n^2) = n^2(n+1)^2$$

و سرانجام

$$S_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = S_1^2$$